



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ  
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ & ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

# Μετρητικά Συστήματα & Αισθητήρες (Υπολογισμοί Ισχύος)

Διδάσκοντες: Παναγιώτης Ε. Σινιόρος, Καθηγητής  
Νικόλαος Μ. Μανουσάκης, Επίκουρος Καθηγητής  
Ακαδημαϊκό έτος 2018-2019

## 1 Εισαγωγή

### 1.1 Μονοφασικά συστήματα

Οι εναλλασσόμενες τάσεις και ρεύματα αλλάζουν την πολικότητα τους σε κάθε κύκλο. Επομένως δεν αποτελεί έκπληξη η διαπίστωση ότι η ισχύς επίσης μεταβάλλεται με τον χρόνο. Το γινόμενο της τάσης  $u$  και του ρεύματος  $i$  καλείται στιγμιαία ισχύς  $p$ , και δίνεται από την σχέση:

$$p = u \cdot i \quad (1)$$

#### 1.1.1 Υπολογισμός ισχύος σε κυκλώματα εναλλασσομένου ρεύματος

Τα κυκλώματα εναλλασσομένου ρεύματος διακρίνονται σε ωμικά, επαγωγικά και χωρητικά.

##### 1.1.1.1 Ωμικό κύκλωμα

Έστω μία εναλλασσόμενη τάση  $u = V_m \sin \omega t$  η οποία τροφοδοτεί ένα ηλεκτρικό κύκλωμα αποτελούμενο μόνο από αντιστάσεις. Το ρεύμα που κυκλοφορεί στο κύκλωμα θα είναι  $i = I_m \sin \omega t$  και η στιγμιαία ισχύς θα δίνεται από την σχέση:

$$p = u \cdot i = (V_m \sin \omega t) \cdot (I_m \sin \omega t) \Rightarrow p = V_m \cdot I_m \cdot \sin^2 \omega t$$

Όμως από την τριγωνομετρία γνωρίζουμε ότι  $\cos 2A = 1 - 2 \cdot \sin^2 A \Rightarrow \sin^2 A = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2A)$ . Επομένως  $\sin^2 \omega t = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2\omega t)$  και με αντικατάσταση προκύπτει:

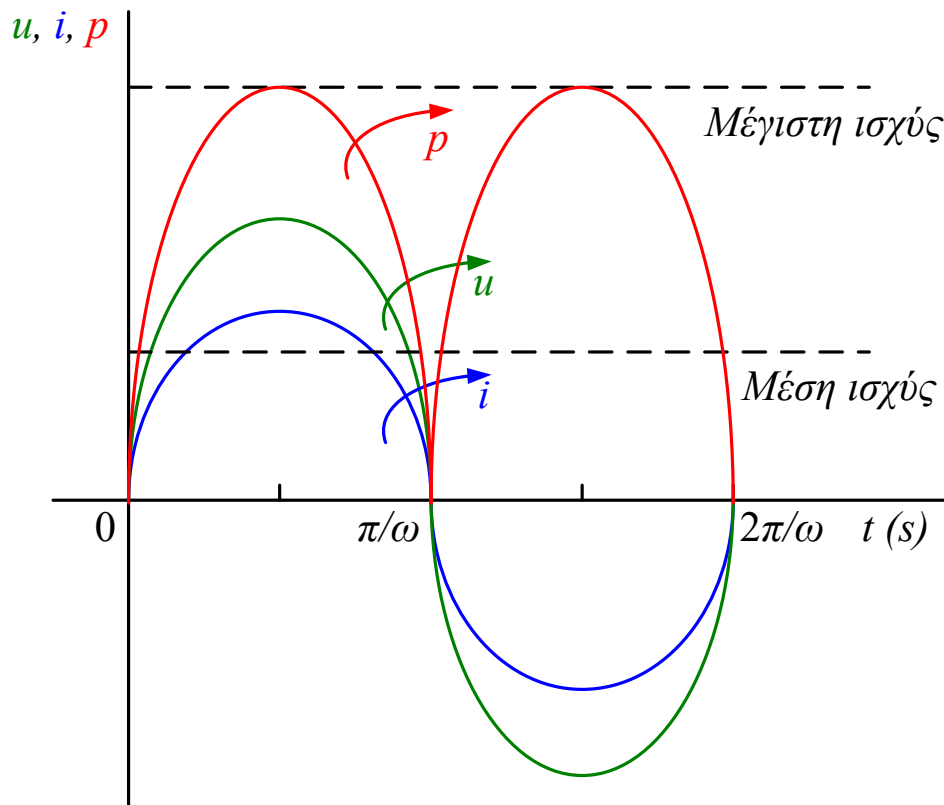
$$p = \frac{1}{2} \cdot V_m \cdot I_m \cdot (1 - \cos 2\omega t) \quad (2)$$

Οι κυματομορφές των  $u$ ,  $i$  και  $p$  φαίνονται στο σχήμα 1.1. Η κυματομορφή της ισχύος επαναλαμβάνεται κάθε  $\pi/\omega$  δευτερόλεπτα και έτσι ισχύς έχει συχνότητα διπλάσια της τάσης και του ρεύματος. Η ισχύς είναι πάντοτε θετική, έχοντας μία μέγιστη τιμή  $V_m \cdot I_m$ . Η μέση τιμή της ισχύος θα είναι  $\frac{1}{2} \cdot V_m \cdot I_m$ .

Η rms ή ενεργός τιμή της τάσης είναι  $V = 0,707 \cdot V_m$ , που σημαίνει  $V = V_m/\sqrt{2}$  από την οποία προκύπτει  $V_m = \sqrt{2} \cdot V$ . Ομοίως για την rms τιμή του ρεύματος  $I = I_m/\sqrt{2}$  και  $I_m = \sqrt{2} \cdot I$ . Επομένως η μέση ισχύς,  $P$ , που αναπτύσσεται σε ένα καθαρά ωμικό κύκλωμα θα δίνεται από την σχέση:

$$P = \frac{1}{2} \cdot V_m \cdot I_m = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2} \cdot V) \cdot (\sqrt{2} \cdot I) = V \cdot I \quad (3)$$

Συνοψίζοντας, η μέση ισχύς σε ένα καθαρά ωμικό κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος είναι  $P = V \cdot I$ , ή λαμβάνοντας υπόψη ότι  $V = I \cdot R$ ,  $P = I^2 \cdot R$  ή  $P = V^2/R$ , όπου  $V$  και  $I$  οι rms τιμές της τάσης και του ρεύματος.



**Σχήμα 1.1** Κυματομορφές τάσης, ρεύματος και ισχύος για ωμικό κύκλωμα

### 1.1.1.2 Επαγωγικό κύκλωμα

Έστω μία εναλλασσόμενη τάση  $u = V_m \sin \omega t$  η οποία τροφοδοτεί ένα ηλεκτρικό κύκλωμα με καθαρά επαγωγική συμπεριφορά. Το ρεύμα που κυκλοφορεί στο κύκλωμα θα είναι  $i = I_m \sin(\omega t - \pi/2)$  και η στιγμιαία ισχύς θα δίνεται από την σχέση:

$$p = u \cdot i = (V_m \sin \omega t) \cdot (I_m \sin(\omega t - \pi/2)) \Rightarrow p = V_m \cdot I_m \cdot \sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \pi/2)$$

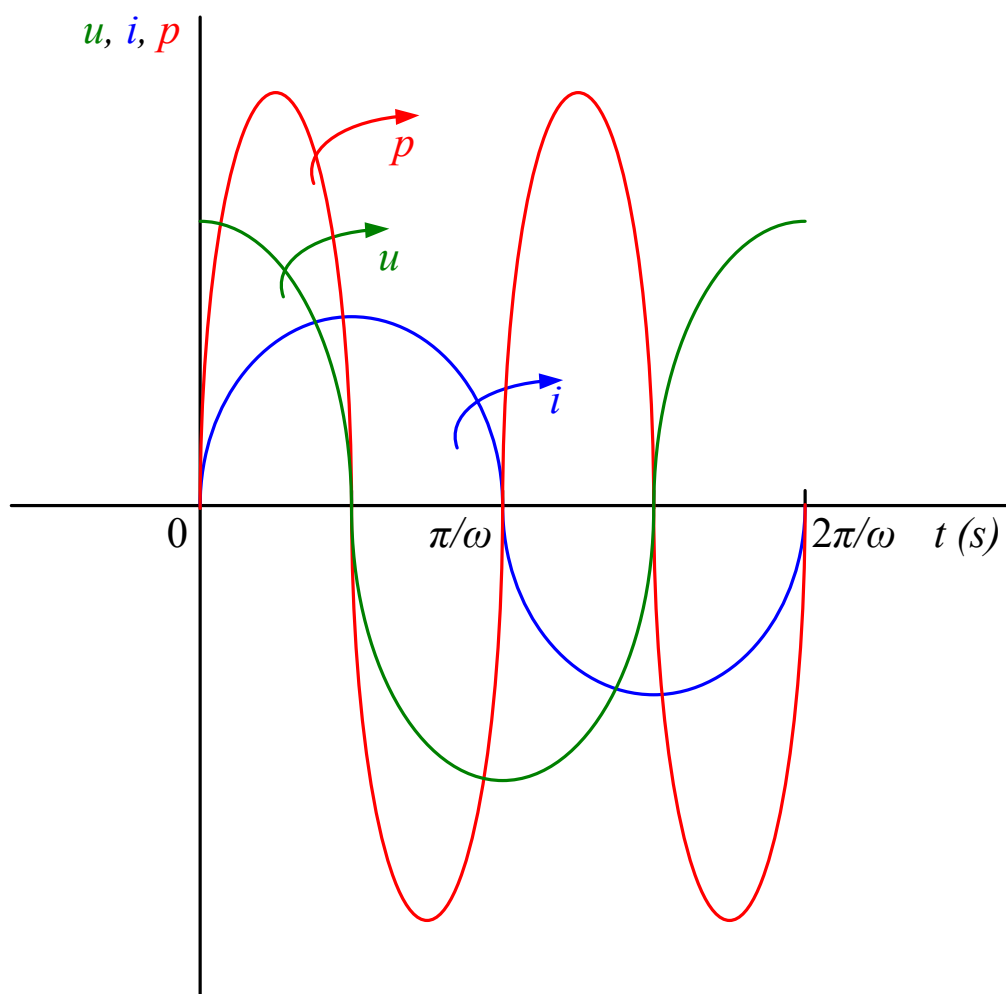
Όμως από την τριγωνομετρία γνωρίζουμε ότι  $\sin(\omega t - \pi/2) = -\cos \omega t$ . Επομένως με αντικατάσταση προκύπτει:

$$p = -V_m \cdot I_m \cdot \sin \omega t \cdot \cos \omega t \quad (3)$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί ως  $p = -\frac{1}{2} \cdot V_m \cdot I_m \cdot (2 \cdot \sin \omega t \cdot \cos \omega t)$ . Από τριγωνομετρία επίσης ισχύει  $2 \cdot \sin \omega t \cdot \cos \omega t = \sin 2\omega t$ . Επομένως η ισχύς θα είναι:

$$p = -\frac{1}{2} \cdot V_m \cdot I_m \cdot \sin 2\omega t \quad (4)$$

Οι κυματομορφές των  $u$ ,  $i$  και  $p$  φαίνονται στο σχήμα 1.2. Η συχνότητα της ισχύος είναι διπλάσια αυτής της τάσης και του ρεύματος. Για την καμπύλη της ισχύος του σχήματος 1.2, το εμβαδό πάνω από τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το εμβαδό κάτω απ' αυτόν, επομένως σε έναν πλήρη κύκλο η μέση ισχύς  $P$  ισούται με μηδέν. Σημειώνεται πως όταν η τάση  $u$  και το ρεύμα  $i$  είναι θετικά, η ισχύς  $p$  είναι θετική και η ενέργεια αποδίδεται από την πηγή προς το πηνίο, ενώ όταν η τάση  $u$  και το ρεύμα  $i$  είναι αρνητικά, η ισχύς  $p$  είναι αρνητική και η ενέργεια επιστρέφει από το πηνίο στην πηγή. Γενικά, όταν το ρεύμα μέσω του πηνίου αυξάνει, η ενέργεια μεταφέρεται από το κύκλωμα προς το μαγνητικό πεδίο, αλλά επιστρέφει όταν το ρεύμα μειώνεται. Συνοψίζοντας, η μέση ισχύς  $P$  σε ένα καθαρά επαγωγικό κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος είναι μηδέν.



**Σχήμα 1.2** Κυματομορφές τάσης, ρεύματος και ισχύος για επαγωγικό κύκλωμα

### 1.1.1.3 Χωρητικό κύκλωμα

Έστω μία εναλλασσόμενη τάση  $u = V_m \sin \omega t$  η οποία τροφοδοτεί ένα ηλεκτρικό κύκλωμα με καθαρά χωρητική συμπεριφορά. Το ρεύμα που κυκλοφορεί στο κύκλωμα θα είναι  $i = I_m \sin(\omega t + \pi/2)$  και η στιγμιαία ισχύς θα δίνεται από την σχέση:

$$p = u \cdot i = (V_m \sin \omega t) \cdot (I_m \sin(\omega t + \pi/2)) \Rightarrow p = V_m \cdot I_m \cdot \sin \omega t \cdot \sin(\omega t + \pi/2)$$

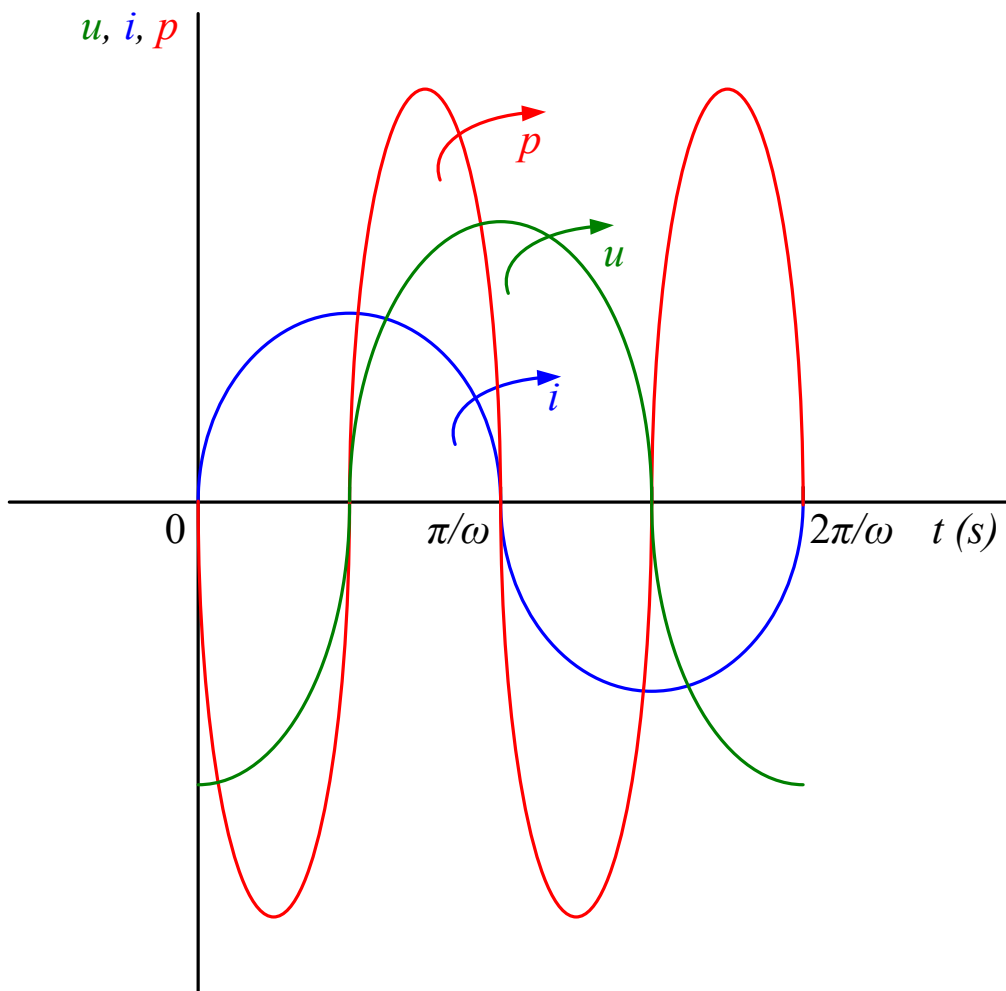
Όμως από την τριγωνομετρία γνωρίζουμε ότι  $\sin(\omega t + \pi/2) = \cos \omega t$ . Επομένως με αντικατάσταση προκύπτει:

$$p = V_m \cdot I_m \cdot \sin \omega t \cdot \cos \omega t \quad (5)$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί ως  $p = \frac{1}{2} \cdot V_m \cdot I_m \cdot (2 \cdot \sin \omega t \cdot \cos \omega t)$ . Από τριγωνομετρία επίσης ισχύει  $2 \cdot \sin \omega t \cdot \cos \omega t = \sin 2\omega t$ . Επομένως η ισχύς θα είναι:

$$p = \frac{1}{2} \cdot V_m \cdot I_m \cdot \sin 2\omega t \quad (6)$$

Οι κυματομορφές των  $u$ ,  $i$  και  $p$  φαίνονται στο σχήμα 1.3. Σε έναν πλήρη κύκλο η μέση ισχύς  $P$  ισούται με μηδέν. Όταν η τάση  $u$  στα άκρα του πυκνωτή αυξάνει, η ενέργεια μεταφέρεται από το κύκλωμα προς το ηλεκτρικό πεδίο, αλλά επιστρέφει όταν το ρεύμα μειώνεται. Συνοψίζοντας, η μέση ισχύς  $P$  σε ένα καθαρά χωρητικό κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος είναι μηδέν.



Σχήμα 1.3 Κυματομορφές τάσης, ρεύματος και ισχύος για χωρητικό κύκλωμα

#### 1.1.1.4 Ωμικο-επαγωγικά ή Ωμικο-χωρητικά κυκλώματα

Έστω μία εναλλασσόμενη τάση  $u = V_m \sin \omega t$  η οποία τροφοδοτεί ένα ηλεκτρικό κύκλωμα το οποίο περιλαμβάνει αντίσταση και πηνίο ή αντίσταση και πυκνωτή. Το ρεύμα που κυκλοφορεί στο κύκλωμα θα είναι  $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ , όπου η γωνία  $\varphi$  είναι θετική για κύκλωμα  $R-C$  και αρνητική για κύκλωμα  $R-L$ . Η αντίστοιχη στιγμιαία ισχύς θα δίνεται από την σχέση:

$$p = u \cdot i = (V_m \sin \omega t) \cdot (I_m \sin(\omega t + \varphi)) \Rightarrow p = V_m \cdot I_m \cdot \sin \omega t \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Όμως από την τριγωνομετρία είναι γνωστό ότι  $\sin A \cdot \sin B = -\frac{1}{2} \cdot [\cos(A+B) - \cos(A-B)]$ . Αντικαθιστώντας όπου  $\omega t = A$  και όπου  $(\omega t + \varphi) = B$ , προκύπτει:

$$p = V_m \cdot I_m \cdot \left\{ -\frac{1}{2} \cdot [\cos(\omega t + \omega t + \varphi) - \cos(\omega t - (\omega t + \varphi))] \right\} \Rightarrow$$

$$p = \frac{1}{2} \cdot V_m \cdot I_m \cdot \left\{ [\cos(-\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi)] \right\}.$$

Αλλά  $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$  και επομένως:

$$p = \frac{1}{2} \cdot V_m \cdot I_m \cdot [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)] \quad (7)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η στιγμιαία ισχύς  $p$  αποτελείται από:

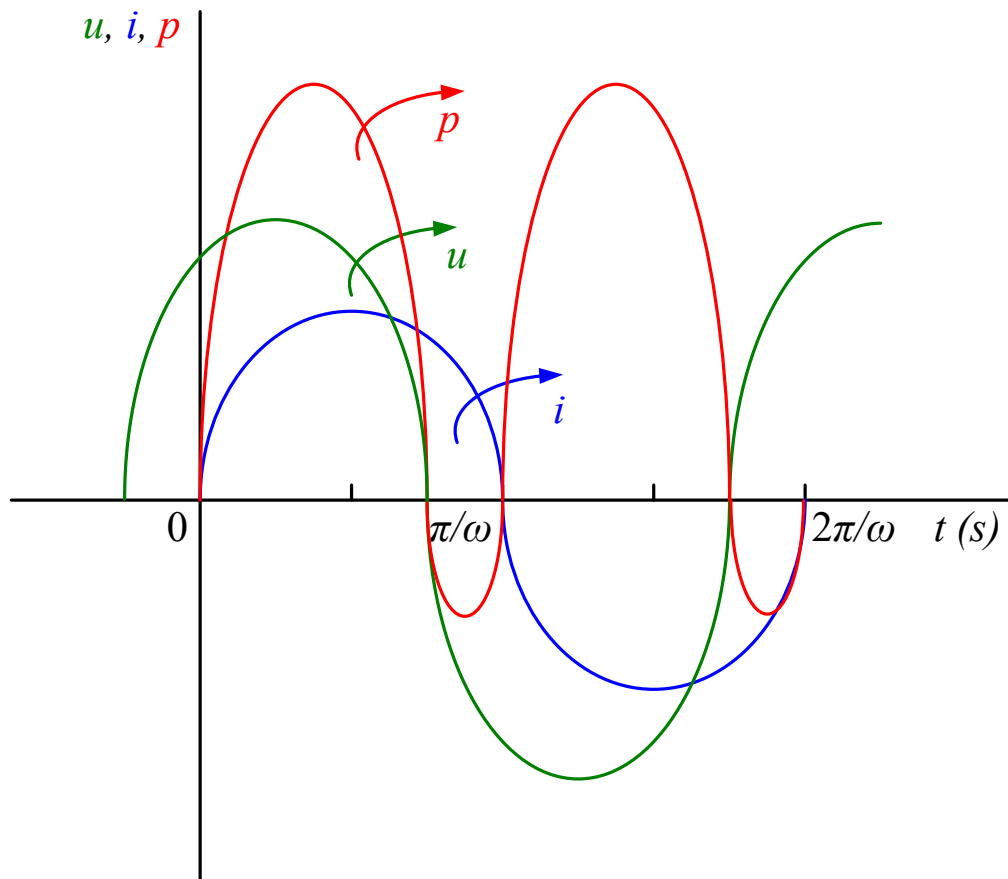
- (i) έναν ημιτονοειδή όρο  $-\frac{1}{2} \cdot V_m \cdot I_m \cdot \cos(2\omega t + \varphi)$  ο οποίος για έναν πλήρη κύκλο έχει μέση τιμή μηδέν, και
- (ii) έναν σταθερό όρο  $\frac{1}{2} \cdot V_m \cdot I_m \cdot \cos \varphi$  (αφού η γωνία  $\varphi$  είναι σταθερή για οποιοδήποτε κύκλωμα).

Η μέση τιμή της ισχύος είναι  $P = \frac{1}{2} \cdot V_m \cdot I_m \cdot \cos \varphi$  και αφού  $V_m = \sqrt{2} \cdot V$  και  $I_m = \sqrt{2} \cdot I$ , προκύπτει:

$$P = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2}V) \cdot (\sqrt{2}I) \cdot \cos \varphi \Rightarrow P = V \cdot I \cdot \cos \varphi \quad (8)$$

Οι κυματομορφές των  $u$ ,  $i$  και  $p$  για ένα κύκλωμα  $R-L$  φαίνονται στο σχήμα 1.4. Η κυματομορφή της ισχύος εμφανίζει συχνότητα διπλάσια της συχνότητας της πηγής. Τα εμβαδά της ισχύος πάνω από τον οριζόντιο άξονα εκφράζουν την ισχύ η οποία παρέχεται στο φορτίο, ενώ τα μικρά εμβαδά κάτω από τον άξονα παριστάνουν την ισχύ που επιστρέφει στην πηγή από την κατάρρευση του μαγνητικού πεδίου. Ένα παρόμοιο σχήμα προκύπτει και για το κύκλωμα  $R-C$ , όπου τα μικρά εμβαδά κάτω από τον οριζόντιο άξονα εκφράζουν την ισχύ που επιστρέφει στην πηγή από τον φορτισμένο πυκνωτή. Η διαφορά μεταξύ των εμβαδών πάνω και κάτω από τον οριζόντιο άξονα παριστάνει τις απώλειες θερμότητας εξαιτίας της ωμικής αντίστασης του κυκλώματος. Αφού η ισχύς καταναλώνεται μόνον επάνω σε ωμική αντίσταση,

μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι εναλλακτικές εξισώσεις για την ισχύ,  $P = I_R^2 \cdot R$ , όπου  $I_R$  είναι το rms ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση  $R$ . Συνοψίζοντας, η μέση ισχύς  $P$  σε ένα κύκλωμα που περιλαμβάνει ωμική αντίσταση και πηνίο ή/και πυκνωτή, εν σειρά ή εν παραλλήλω, δίνεται από την σχέση  $P = V \cdot I \cdot \cos \varphi$  ή  $P = I_R^2 \cdot R$ , όπου  $V$ ,  $I$  και  $I_R$  οι rms τιμές των μεγεθών.



**Σχήμα 1.4** Ισχύς σε κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος που περιλαμβάνει ωμική και επαγωγική αντίσταση

### 1.1.2 Τρίγωνο ισχύος και συντελεστής ισχύος

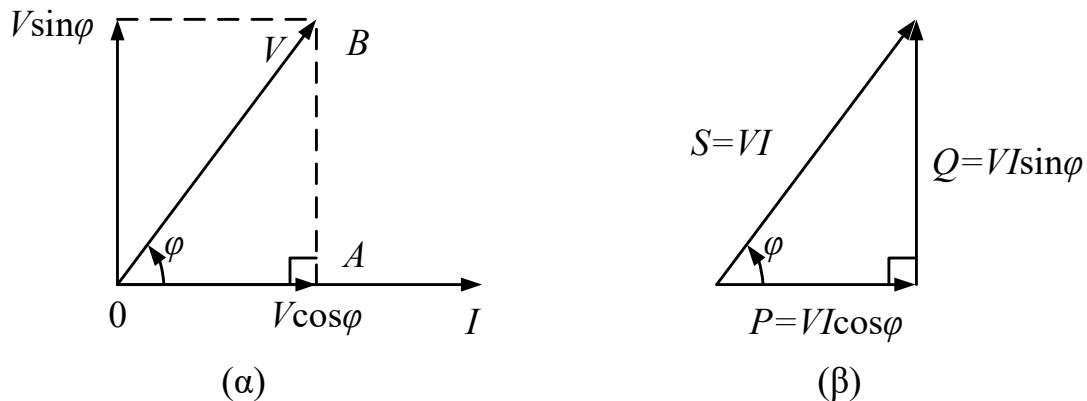
Ένα διανυσματικό διάγραμμα στο οποίο το ρεύμα  $I$  έπεται της εφαρμοζόμενης τάσης  $V$  κατά γωνία  $\varphi$  (περίπτωση επαγωγικού κυκλώματος) εμφανίζεται στο σχήμα 1.5(α). Η οριζόντια συνιστώσα της τάσης  $V$  είναι  $V \cos \varphi$ , και η κατακόρυφη συνιστώσα  $V \sin \varphi$ . Εάν κάθε ένας από τους φασιθέτες τάσης του τριγώνου  $0AB$  πολλαπλασιαστεί με  $I$ , τότε παράγεται το σχήμα 1.5(β) που είναι γνωστό και ως τρίγωνο ισχύος. Κάθε πλευρά του τριγώνου παριστάνει ένα συγκεκριμένο τύπο ισχύος:

**Πραγματική ή ενεργός ισχύς:**  $P = V \cdot I \cdot \cos \varphi$  (W) (9)

**Άεργος ισχύς:**  $Q = V \cdot I \cdot \sin \varphi$  (VAr) (10)

**Φαινόμενη ισχύς:**  $S = V \cdot I$  (VA) (11)

Το τρίγωνο ισχύος **δεν είναι** διανυσματικό διάγραμμα αφού τα μεγέθη  $P$ ,  $Q$  και  $S$  είναι οι μέσες και όχι οι rms τιμές των ημιτονοειδώς μεταβαλλόμενων μεγεθών.



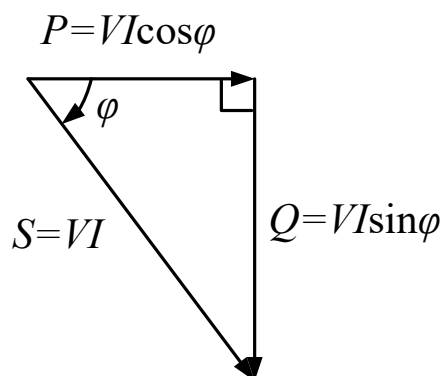
**Σχήμα 1.5 (α) Φασικό διάγραμμα (β) Τρίγωνο ισχύος για επαγωγικό φορτίο**

Τοποθετώντας το τρίγωνο ισχύος στο μιγαδικό επίπεδο, η μιγαδική σχέση που συνδέει τα τρία μεγέθη ισχύος είναι:

$$\tilde{S} = P + j \cdot Q \quad (12)$$

Το μέτρο της ισχύος  $\tilde{S}$  καλείται **φαινόμενη ισχύς**,  $S$ . Είναι ένα πολύ σημαντικό μέγεθος αφού όλες οι συσκευές εναλλασσομένου ρεύματος, όπως γεννήτριες, μετασχηματιστές και καλώδια συνήθως χαρακτηρίζονται με αυτή και όχι με την ενεργό ισχύ. Η επιτρεπόμενη απόδοση μια τέτοιας συσκευής συνήθως περιορίζεται από την αύξηση της θερμοκρασίας και όχι από την μηχανική αντοχή, δηλαδή καθορίζεται από τις απώλειες της συσκευής. Οι απώλειες υπολογίζονται από την τάση και το ρεύμα και είναι σχεδόν ανεξάρτητες από τον συντελεστή ισχύος. Έτσι η ποσότητα του ηλεκτρολογικού εξοπλισμού που εγκαθίσταται για να τροφοδοτήσει ένα φορτίο υπολογίζεται με βάση τα  $VA$  του φορτίου παρά από αυτή καθαυτή την ισχύ.

Η **άεργος ισχύς**,  $Q$ , δεν συνεισφέρει τίποτα στην ενέργεια που μεταφέρεται στο δίκτυο και προκαλεί την μεγαλύτερη δυνατή υπερφόρτιση του εξοπλισμού. Ο όρος φαινόμενη ισχύς χρησιμοποιείται κυρίως στην παραγωγή, μεταφορά και διανομή της ηλεκτρικής ενέργειας. Η επαγωγική άεργος ισχύς, κατά σύμβαση, ορίζεται ως θετική άεργος ισχύς, ενώ η χωρητική άεργος ισχύς, κατά σύμβαση, θεωρείται αρνητική άεργος ισχύς. Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν τόσο για επαγωγικό, όσο και για χωρητικό φορτίο (όπως φαίνεται στο σχήμα 1.6).





### Σχήμα 1.6 Τρίγωνο ισχύος για χωρητικό φορτίο

Ο συντελεστής ισχύος,  $\Sigma I$ , ορίζεται ως:

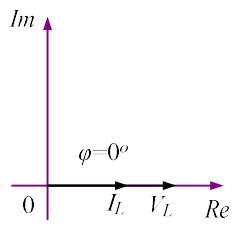
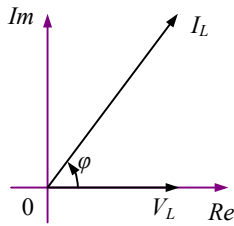
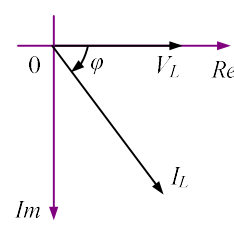
$$\Sigma I = \frac{P}{S} \quad (13)$$

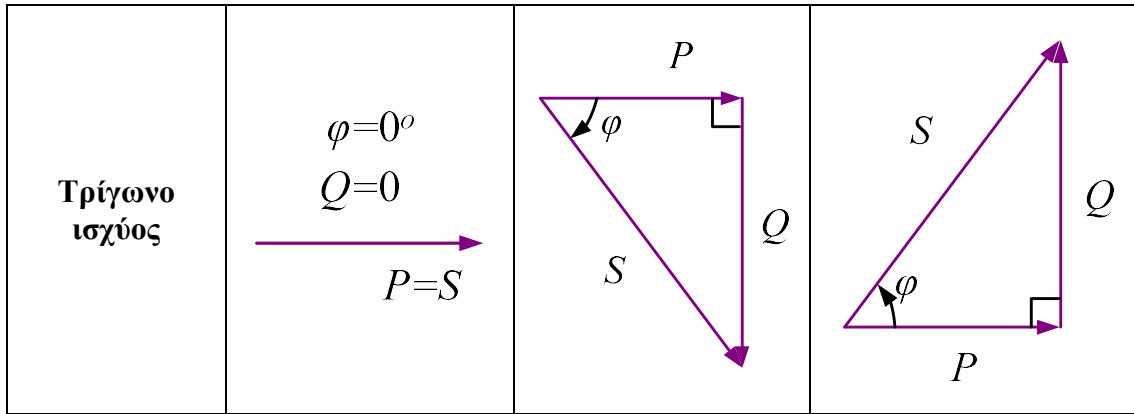
Για ημιτονοειδείς τάσεις και ρεύματα ισχύει επίσης ότι (από τρίγωνο σύνθετης αντίστασης):

$$\Sigma I = \frac{P}{S} = \frac{V \cdot I \cdot \cos \varphi}{V \cdot I} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{R}{Z} \quad (14)$$

Ένα κύκλωμα στο οποίο το ρεύμα καθυστερεί της τάσης (δηλαδή, επαγωγικό κύκλωμα) λέγεται ότι έχει συντελεστή ισχύος μεταπορείας, και δείχνει την άεργο ισχύ να μεταπορεύεται. Ένα κύκλωμα στο οποίο το ρεύμα προηγείται της τάσης (δηλαδή, χωρητικό κύκλωμα) λέγεται ότι έχει συντελεστή ισχύος προπορείας, και δείχνει την άεργο ισχύ να προπορεύεται. Ο πίνακας 1.1 συνοψίζει όλα τα βασικά σημεία που αφορούν την παραπάνω ανάλυση.

**Πίνακας 1.1 Βασικά στοιχεία ανάλυσης ισχύος**

Φορτίο	Ωμικό	Χωρητικό	Επαγωγικό
Νόμος του Ohm	$V_L = Z_L \cdot I_L$	$V_L = Z_L \cdot I_L$	$V_L = Z_L \cdot I_L$
Σύνθετη αντίσταση	$Z_L = R_L$	$Z_L = R_L - j \cdot X_L$	$Z_L = R_L + j \cdot X_L$
Όρισμα (Φασική γωνία)	$\varphi = 0^\circ$	$\varphi < 0^\circ$	$\varphi > 0^\circ$
Διανυσματικό διάγραμμα $V_L \leftrightarrow I_L$			
Επεξήγηση	Το ρεύμα είναι συμφασικό με την τάση	Το ρεύμα "προπορεύεται" της τάσης	Το ρεύμα "μεταπορεύεται" της τάσης
Συντελεστής Ισχύος ( $\cos \varphi$ )	1,0	< 1,0 (προπορείας)	< 1,0 (μεταπορείας)
Άεργος ισχύς ( $Q$ )	Μηδενική	Αρνητική	Θετική



### 1.1.3 Χρήση μιγαδικών αριθμών στους υπολογισμούς ισχύος - Μιγαδική ισχύς

Έστω ένα κύκλωμα το οποίο τροφοδοτείται από μία εναλλασσόμενη τάση  $V \angle \varphi_V$ , όπου:

$$V \angle \varphi_V = V \cdot (\cos \varphi_V + j \cdot \sin \varphi_V) = V \cdot \cos \varphi_V + j \cdot V \cdot \sin \varphi_V = V_{\text{Re}} + j \cdot V_{\text{Im}} \quad (15)$$

Έστω ακόμη ότι το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι τάση  $I \angle \varphi_I$ , όπου:

$$I \angle \varphi_I = I \cdot (\cos \varphi_I + j \cdot \sin \varphi_I) = I \cdot \cos \varphi_I + j \cdot I \cdot \sin \varphi_I = I_{\text{Re}} + j \cdot I_{\text{Im}} \quad (16)$$

Είναι γνωστό ότι η πραγματική ισχύς δίνεται από την σχέση  $P = V \cdot I \cdot \cos \varphi$ , όπου  $\varphi$  είναι η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και ρεύματος. Έτσι εάν η τάση είναι  $V \angle \varphi_V$  και το ρεύμα  $I \angle \varphi_I$ , τότε η γωνία μεταξύ τάσης και ρεύματος θα είναι  $\varphi_V - \varphi_I$ . Επομένως η πραγματική ισχύς θα είναι  $P = V \cdot I \cdot \cos(\varphi_V - \varphi_I)$ . Όμως:

$\cos(\varphi_V - \varphi_I) = \cos \varphi_V \cdot \cos \varphi_I + \sin \varphi_V \cdot \sin \varphi_I$ . Με αντικατάσταση προκύπτει:

$P = V \cdot I \cdot [\cos \varphi_V \cdot \cos \varphi_I + \sin \varphi_V \cdot \sin \varphi_I]$ . Η τελευταία σχέση με αναδιάταξη των όρων της γράφεται:  $P = (V \cdot \cos \varphi_V) \cdot (I \cdot \cos \varphi_I) + (V \cdot \sin \varphi_V) \cdot (I \cdot \sin \varphi_I)$ . Βάσει των εξισώσεων (15) και (16) έχουμε:  $P = V_{\text{Re}} \cdot I_{\text{Re}} + V_{\text{Im}} \cdot I_{\text{Im}}$ .

**Συνοψίζοντας, εάν  $V = V_{\text{Re}} + j \cdot V_{\text{Im}}$  και  $I = I_{\text{Re}} + j \cdot I_{\text{Im}}$ , τότε η πραγματική ισχύς θα είναι:**

$$P = V_{\text{Re}} \cdot I_{\text{Re}} + V_{\text{Im}} \cdot I_{\text{Im}} \quad (17)$$

Έτσι η πραγματική ισχύς μπορεί να υπολογιστεί από το άθροισμα των γινομένων των πραγματικών και φανταστικών συνιστωσών της τάσης και του ρεύματος.

Η άεργος ισχύς θα είναι  $Q = V \cdot I \cdot \sin(\varphi_V - \varphi_I)$ . Όμως:

$\sin(\varphi_V - \varphi_I) = \sin \varphi_V \cdot \cos \varphi_I - \cos \varphi_V \cdot \sin \varphi_I$ . Με αντικατάσταση προκύπτει:

$Q = V \cdot I \cdot [\sin \varphi_V \cdot \cos \varphi_I - \cos \varphi_V \cdot \sin \varphi_I]$ . Η τελευταία σχέση με αναδιάταξη των όρων της γράφεται:  $Q = (V \cdot \sin \varphi_V) \cdot (I \cdot \cos \varphi_I) - (V \cdot \cos \varphi_V) \cdot (I \cdot \sin \varphi_I)$ . Βάσει των εξισώσεων (15) και (16) έχουμε:  $Q = V_{\text{Im}} \cdot I_{\text{Re}} - V_{\text{Re}} \cdot I_{\text{Im}}$ .

**Συνοψίζοντας, εάν  $V = V_{\text{Re}} + j \cdot V_{\text{Im}}$  και  $I = I_{\text{Re}} + j \cdot I_{\text{Im}}$ , τότε η άεργος ισχύς θα είναι:**

$$Q = V_{\text{Im}} \cdot I_{\text{Re}} - V_{\text{Re}} \cdot I_{\text{Im}} \quad (18)$$

Οι εκφράσεις (17) και (18) παρέχουν μία εναλλακτική μέθοδο υπολογισμού της πραγματικής και αέργου ισχύος όταν η τάση και το ρεύμα είναι μιγαδικές ποσότητες. Από την σχέση (12), η φαινόμενη ισχύς είναι  $\tilde{S} = P + jQ$ .

Όμως, ο πολλαπλασιασμός της τάσης  $V$  με το ρεύμα  $I$  σε μιγαδική μορφή δεν θα δώσει αυτό καθ' αυτό το αποτέλεσμα, αφού:

$$\tilde{S} = V \cdot I = (V_{\text{Re}} + j \cdot V_{\text{Im}}) \cdot (I_{\text{Re}} + j \cdot I_{\text{Im}}) = (V_{\text{Re}} \cdot I_{\text{Re}} - V_{\text{Im}} \cdot I_{\text{Im}}) + j \cdot (V_{\text{Im}} \cdot I_{\text{Re}} + V_{\text{Re}} \cdot I_{\text{Im}})$$

Σ' αυτή την σχέση, οι εκφράσεις για την πραγματική και την άεργο ισχύ δεν συμπίπτουν με τις αντίστοιχες που δίνονται από τις εξισώσεις (17) και (18).

Η σωστή έκφραση προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την τάση  $V$  με τον συζυγή μιγαδικό του ρεύματος, ο οποίος συμβολίζεται με  $I^*$ . Έτσι η **μιγαδική ισχύς** υπολογίζεται ως:

$$\tilde{S} = V \cdot I^* = (V_{\text{Re}} + j \cdot V_{\text{Im}}) \cdot (I_{\text{Re}} - j \cdot I_{\text{Im}}) = (V_{\text{Re}} \cdot I_{\text{Re}} + V_{\text{Im}} \cdot I_{\text{Im}}) + j \cdot (V_{\text{Im}} \cdot I_{\text{Re}} - V_{\text{Re}} \cdot I_{\text{Im}})$$

που σημαίνει, βάσει των (17) και (18), ότι  $\tilde{S} = P + jQ$ .



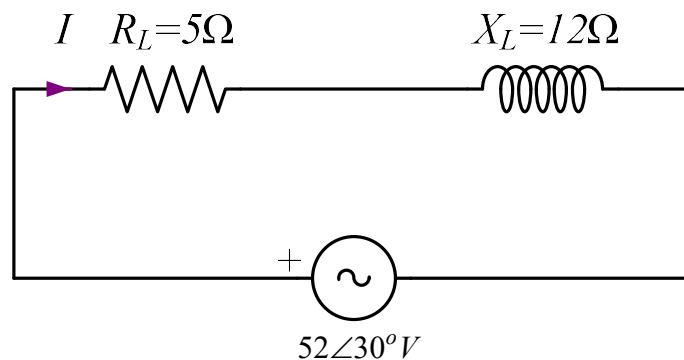
Η πραγματική και άεργος ισχύες μπορούν να υπολογιστούν, εάν και μόνο εάν, η τάση  $V$  πολλαπλασιαστεί με τον συζυγή μιγαδικό του ρεύματος  $I$ ,  $\tilde{S} = V \cdot I^*$ . Το μέτρο της μιγαδικής ισχύος, εκφράζει την φαινόμενη ισχύ.



Η θετική τιμή της αέργου ισχύος  $Q$  δείχνει ένα επαγωγικό κύκλωμα που έχει συντελεστή ισχύος μεταπορείας, ενώ η αρνητική τιμή της αέργου ισχύος  $Q$  δείχνει ένα χωρητικό κύκλωμα που έχει συντελεστή ισχύος προπορείας.

**Πρόβλημα 1.1.** Ένα πηνίο ωμικής αντίστασης  $5\Omega$  και επαγωγικής αντίστασης  $12\Omega$ , τροφοδοτείται από μία πηγή τάσης  $52\angle 30^\circ V$ . Να υπολογιστεί η ενεργός ισχύς στο κύκλωμα.

Το κυκλωματικό διάγραμμα φαίνεται στο σχήμα 1.7.



Σχήμα 1.7. Κυκλωματικό διάγραμμα για το πρόβλημα 1.1

Η σύνθετη αντίσταση είναι:  $Z = (5 + j \cdot 12) \Omega \Rightarrow Z = 13 \angle 67,38^\circ \Omega$

Η τάση είναι:  $V = 52 \angle 30^\circ V \Rightarrow V = (45,03 + j \cdot 26,00) V$

Το ρεύμα υπολογίζεται ως:

$$I = \frac{V}{Z} \Rightarrow I = \frac{52 \angle 30^\circ}{13 \angle 67,38^\circ} \Rightarrow I = 4,00 \angle -37,38^\circ A = (3,18 - j \cdot 2,43) A$$

Υπάρχουν τρεις μέθοδοι υπολογισμού ισχύος:

#### Μέθοδος 1

Η ενεργός ισχύς είναι  $P = V \cdot I \cdot \cos \varphi$ , όπου  $\varphi$  είναι η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και ρεύματος. Έτσι  $P = 52 \cdot 4 \cdot \cos [30^\circ - (-37,38^\circ)] = 52 \cdot 4 \cdot \cos 67,38^\circ \Rightarrow P = 80W$ .

#### Μέθοδος 2

Η ενεργός ισχύς είναι  $P = I_R^2 \cdot R \Rightarrow P = 4^2 \cdot 5 \Rightarrow P = 80W$ .

#### Μέθοδος 3

Αφού  $V = (45,03 + j \cdot 26,00) V$  και  $I = (3,18 - j \cdot 2,43) A$  η ενεργός ισχύς θα είναι  $P = (45,03) \cdot (3,18) + (26,00) \cdot (-2,43) \Rightarrow P = 143,2 - 63,2 \Rightarrow P = 80W$ .

**Πρόβλημα 1.2.** Ένα ρεύμα  $(15 + j \cdot 8) A$  διαρρέει ένα κύκλωμα το οποίο τροφοδοτείται από πηγή  $(120 + j \cdot 200) V$ . Να υπολογιστεί (α) η ενεργός ισχύς και (β) η άεργος ισχύς.

(α)

#### Μέθοδος 1

Η ενεργός ισχύς είναι:

$$P = (120) \cdot (15) + (200) \cdot (8) \Rightarrow P = 1800 + 1600 \Rightarrow P = 3400W = 3,4kW$$

#### Μέθοδος 2

Αφού  $I = (15 + j \cdot 8) A = 17 \angle 28,07^\circ A$  και  $V = (120 + j \cdot 200) V = 233,24 \angle 59,04^\circ V$ ,

η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και ρεύματος θα είναι  $59,04^\circ - 28,07^\circ = 30,97^\circ$ .

Επομένως η ενεργός ισχύς θα είναι:

$$P = V \cdot I \cdot \cos \varphi \Rightarrow P = 233,24 \cdot 17 \cdot \cos 30,97^\circ \Rightarrow P = 3,4kW$$

(β)

#### Μέθοδος 1

Η άεργος ισχύς είναι:

$$Q = (200) \cdot (15) - (120) \cdot (8) \Rightarrow Q = 3000 - 960 \Rightarrow Q = 2040Var = 2,04kVar$$

### Μέθοδος 2

Αφού  $I = (15 + j \cdot 8) A = 17 \angle 28,07^\circ A$  και  $V = (120 + j \cdot 200) V = 233,24 \angle 59,04^\circ V$ , η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και ρεύματος θα είναι  $59,04^\circ - 28,07^\circ = 30,97^\circ$ . Επομένως η άεργος ισχύς θα είναι:

$$Q = V \cdot I \cdot \sin \varphi \Rightarrow Q = 223,24 \cdot 17 \cdot \sin 30,97^\circ \Rightarrow Q = 2,04 \text{ kVAr}.$$

**Εναλλακτικά**, τα ζητούμενα θα μπορούσαν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας την μιγαδική ισχύ:

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= V \cdot I^* = V \cdot (15 - j \cdot 8) = (120 + j \cdot 200) \cdot (15 - j \cdot 8) = (1800 + 1600) + j \cdot (3000 - 960) = \\ &= (3400) + j \cdot (2040) \end{aligned}$$

Αλλά,  $\tilde{S} = P + j \cdot Q$ . Επομένως  $P = 3,4 \text{ kW}$  και  $Q = 2,04 \text{ kVAr}$ .

**Πρόβλημα 1.3.** Ένα κύκλωμα R-C καταναλώνει  $1,732 \text{ kW}$  και έχει συντελεστή ισχύος  $0,866$  προπορείας. Εάν το κύκλωμα τροφοδοτείται από μία πηγή  $141,4 \cdot \sin(10^4 \cdot t + (\pi/9)) V$ , να υπολογιστούν (α) το μέτρο και το όρισμα του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα, (β) η τιμή της αντίστασης R και γ) η τιμή της χωρητικότητας C.

α) Αφού  $u = 141,4 \cdot \sin(10^4 \cdot t + (\pi/9)) V$ , η τιμή  $141,4 V$  εκφράζει την μέγιστη τιμή, από την οποία προκύπτει η rms τιμή ως  $V_{rms} = 141,4 / \sqrt{2} \Rightarrow V_{rms} = 100 V$ . Η φασική γωνία θα είναι ίση με  $(\pi/9) \text{ rad} = 20^\circ$ . Συνεπώς ο φασιθέτης τάσης μπορεί να γραφεί ως  $100 \angle 20^\circ V$ . Επίσης  $\cos \varphi = 0,866 \Rightarrow \varphi = \arccos 0,866 \Rightarrow \varphi = 30^\circ$ . Δηλαδή, η διαφορά φάσης είναι  $\varphi = 30^\circ$ .

Η πραγματική ισχύς δίνεται από την σχέση:

$$P = V \cdot I \cdot \cos \varphi \Rightarrow I = \frac{P}{V \cdot \cos \varphi} \Rightarrow I = \frac{1732}{100 \cdot 0,866} = 20 A.$$

Αφού ο συντελεστής ισχύος είναι προπορείας, ο φασιθέτης ρεύματος προηγείται αυτού της τάσης κατά  $\varphi = 30^\circ$ . Όμως ο φασιθέτης τάσης έχει όρισμα  $\varphi_V = 20^\circ$  και άρα  $\varphi_I = \varphi + \varphi_V = 30^\circ + 20^\circ \Rightarrow \varphi_I = 50^\circ$ . Έτσι ο φασιθέτης ρεύματος θα δίνεται από την σχέση  $I = 20 \angle 50^\circ A$ .

β) Η σύνθετη αντίσταση υπολογίζεται ως:

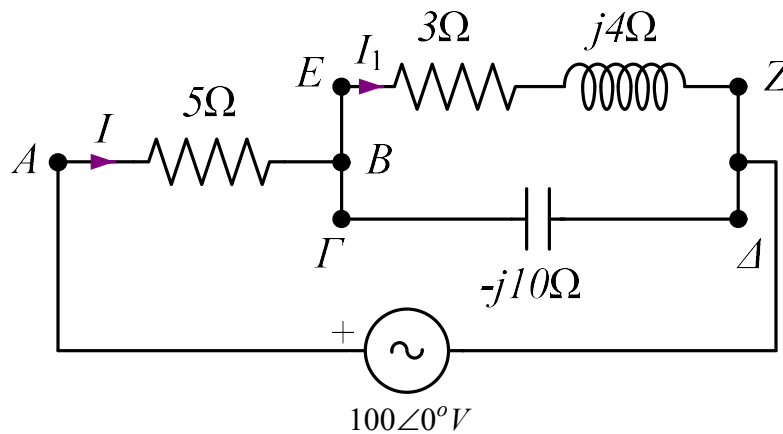
$$Z = \frac{V}{I} \Rightarrow Z = \frac{100 \angle 20^\circ}{20 \angle 50^\circ} = 5 \angle -30^\circ \Omega \Rightarrow Z = (4,33 - j \cdot 2,5) \Omega.$$

Άρα η ωμική αντίσταση είναι  $R = 4,33 \Omega$  και η χωρητική αντίσταση  $X_C = 2,5 \Omega$ . Εναλλακτικά, η ωμική αντίσταση μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση

$$P = I^2 \cdot R \Rightarrow R = \frac{P}{I^2} \Rightarrow R = \frac{1732}{20^2} \Rightarrow R = 4,33 \Omega.$$

γ) Αφού  $u = 141,4 \cdot \sin(10^4 \cdot t + (\pi/9))V$ , η κυκλική συχνότητα θα είναι:  
 $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$ . Η χωρητική αντίσταση δίνεται από την σχέση  
 $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega \cdot X_C} \Rightarrow C = \frac{1}{10^4 \cdot 2,5} \Rightarrow C = 40 \mu F$ .

**Πρόβλημα 1.4.** Για το κύκλωμα του σχήματος 1.8, να υπολογιστεί η ισχύς που καταναλώνεται στα στοιχεία των άκρων (α) A και B, (β) Γ και Δ, (γ) E και Z.



**Σχήμα 1.8** Κυκλωματικό διάγραμμα για το πρόβλημα 1.4

Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι:

$$Z = 5 + \frac{(3 + j \cdot 4) \cdot (-j \cdot 10)}{(3 + j \cdot 4 - j \cdot 10)} \Rightarrow Z = 5 + \frac{(40 - j \cdot 30)}{(3 - j \cdot 6)} \Rightarrow Z = 5 + \frac{50 \angle -36,87^\circ}{6,71 \angle -63,43^\circ} \Rightarrow$$

$$Z = 5 + 7,45 \angle 26,56^\circ \Rightarrow Z = 5 + 6,66 + j \cdot 3,33 \Rightarrow$$

$$Z = (11,66 + j \cdot 3,33) \Omega \Rightarrow Z = 12,13 \angle 15,94^\circ \Omega$$

Το συνολικό ρεύμα του κυκλώματος είναι:

$$I = \frac{V}{Z} \Rightarrow I = \frac{100 \angle 0^\circ}{12,13 \angle 15,94^\circ} = 8,24 \angle -15,94^\circ A$$

α) Η ενεργός ισχύς που καταναλώνεται στο στοιχείο μεταξύ των άκρων A και B είναι:  $P_{A-B} = I^2 \cdot R \Rightarrow P_{A-B} = 8,24^2 \cdot 5 \Rightarrow P_{A-B} = 339,5W$ .

β) Η ενεργός ισχύς που καταναλώνεται στον πυκνωτή μεταξύ άκρων Γ και Δ είναι:  
 $P_{\Gamma-\Delta} = 0W$ .

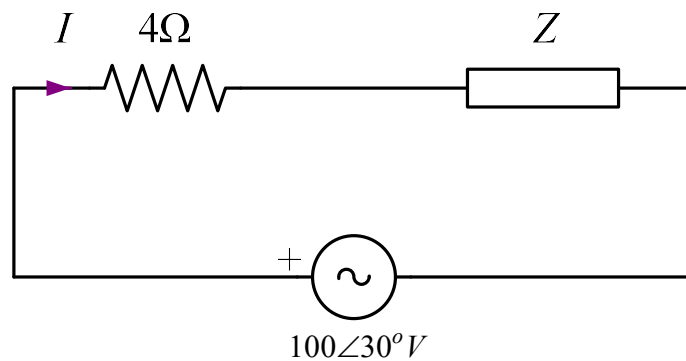
γ) Με εφαρμογή του διαιρέτη ρεύματος, προκύπτει:

$$I_1 = I \cdot \frac{Z_{\Gamma-\Delta}}{Z_{\Gamma-\Delta} + Z_{E-Z}} \Rightarrow I_1 = 8,24 \angle -15,94^\circ \cdot \frac{(-j \cdot 10)}{(3 - j \cdot 6)} \Rightarrow$$

$$I_1 = 8,24 \angle -15,94^\circ \cdot \frac{10 \angle -90^\circ}{6,71 \angle -63,43^\circ} \Rightarrow I_1 = 12,28 \angle -42,51^\circ \text{ A}$$

Έτσι η πραγματική ισχύς που καταναλώνεται στον κλάδο μεταξύ των άκρων E και Z είναι:  $P_{E-Z} = I_1^2 \cdot R_T \Rightarrow P_{E-Z} = 12,28^2 \cdot 3 \Rightarrow P_{A-B} = 452,4 \text{ W}$ .

**Πρόβλημα 1.5.** Το κύκλωμα του σχήματος 1.9 καταναλώνει  $400 \text{ W}$  και έχει συντελεστή ισχύος  $0,766$  μεταφορείας. Να υπολογιστούν (α) η φαινόμενη ισχύς, (β) η άεργος ισχύς, (γ) το μέτρο και το όρισμα του φασιθέτη ρεύματος και (δ) η τιμή της σύνθετης αντίστασης Z.



**Σχήμα 1.9** Κυκλωματικό διάγραμμα για το πρόβλημα 1.5

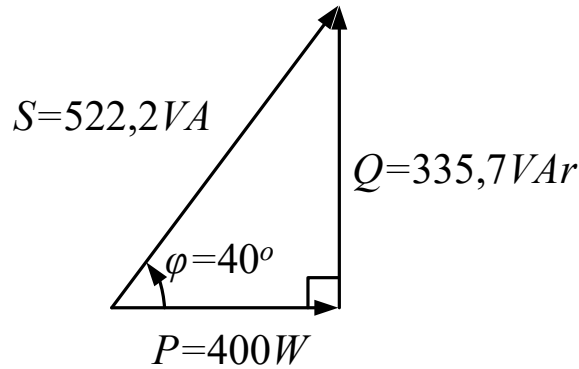
Αφού ο συντελεστής ισχύος είναι  $\cos \varphi = 0,766 \Rightarrow \varphi = \arccos 0,766 \Rightarrow \varphi = 40^\circ$ . Αυτό σημαίνει ότι το ρεύμα  $I$  καθυστερεί της τάσης  $V$  κατά  $40^\circ$ .

(α) Αφού η πραγματική ισχύς είναι:

$$P = V \cdot I \cdot \cos \varphi \Rightarrow P = S \cdot \cos \varphi \Rightarrow S = \frac{P}{\cos \varphi} = \frac{400}{0,766} \Rightarrow S = 522,2 \text{ VA}.$$

(β) Η άεργος ισχύς είναι:

$Q = V \cdot I \cdot \sin \varphi \Rightarrow Q = S \cdot \sin \varphi \Rightarrow Q = 522,2 \cdot \sin 40^\circ \Rightarrow Q = 335,7 \text{ VAR}$  μεταφορείας. Το τρίγωνο ισχύος φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



**Σχήμα 1.10 Τρίγωνο ισχύος για το πρόβλημα 1.5**

γ) Αφού  $S = V \cdot I = 522,2VA$ , το μέτρο του φασιθέτη ρεύματος θα είναι:  $|I| = \frac{S}{V} \Rightarrow$

$|I| = \frac{522,2}{100} \Rightarrow |I| = 5,222A$ . Όμως το όρισμα του φασιθέτη τάσης είναι  $\varphi_V = 30^\circ$  και το ρεύμα καθυστερεί της τάσης κατά  $40^\circ$ . Επομένως το όρισμα του φασιθέτη ρεύματος είναι:  $\varphi_I = \varphi_V - \varphi = 30^\circ - 40^\circ = -10^\circ$ . Έτσι ο φασιθέτης ρεύματος είναι:

$$I = |I| \angle \varphi_I \Rightarrow I = 5,222 \angle -10^\circ A.$$

δ) Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος θα είναι:

$$Z_T = \frac{V}{I} \Rightarrow Z_T = \frac{100 \angle 30^\circ}{5,222 \angle -10^\circ} = 19,15 \angle 40^\circ \Omega \Rightarrow Z_T = (14,67 + j \cdot 12,31) \Omega.$$

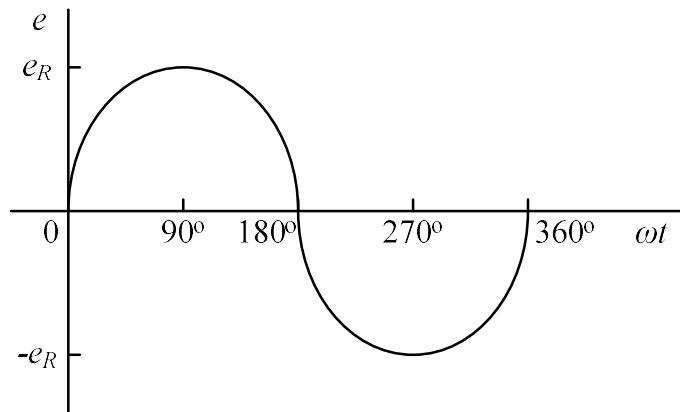
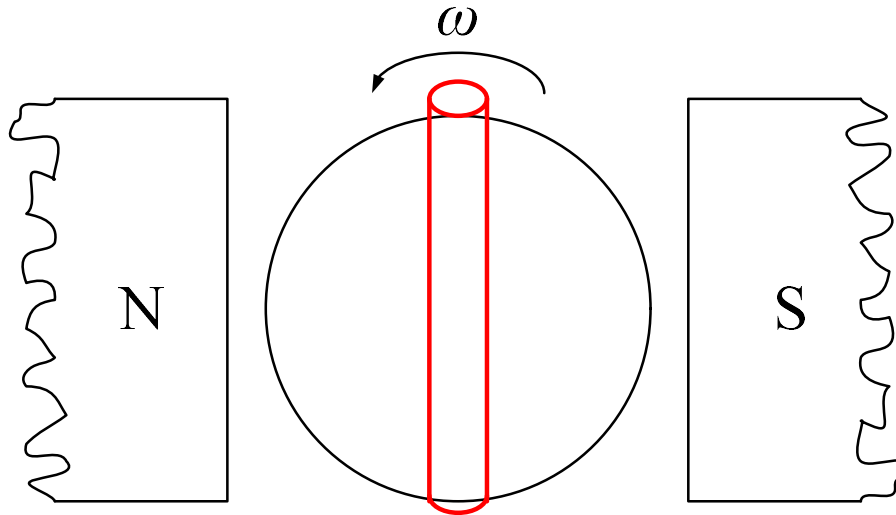
Έτσι η σύνθετη αντίσταση θα είναι:

$$Z = Z_T - 4 \Rightarrow Z = (14,67 + j \cdot 12,31) - 4 \Rightarrow Z = (10,67 + j \cdot 12,31) = 16,29 \angle 49,08^\circ \Omega.$$

## 1.2 Τριφασικά συστήματα

Η παραγωγή, μεταφορά και διανομή ηλεκτρικής ενέργειας μέσω του Εθνικού Δικτύου επιτυγχάνεται με χρήση τριφασικών εναλλασσόμενων ρευμάτων. Η επαγόμενη τάση ενός πηνίου που περιστρέφεται σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο φαίνεται στο σχήμα 1.11 και είναι γνωστή ως **μονοφασική τάση**. Οι περισσότεροι καταναλωτές τροφοδοτούνται από μία μονοφασική παροχή εναλλασσόμενης τάσης. Δύο καλώδια χρησιμοποιούνται, εκ των οποίων το ένα καλείται ενεργός αγωγός και το άλλο ουδέτερος αγωγός. Ο ουδέτερος συνήθως συνδέεται μέσω ενός προστατευτικού κιβωτίου με την γη. Η ονομαστική τάση για μία μονοφασική παροχή εναλλασσόμενου ρεύματος είναι 230V. Η πλειοψηφία των μονοφασικών παροχών προκύπτει με σύνδεση σε μία τριφασική παροχή (σχήμα 1.15).



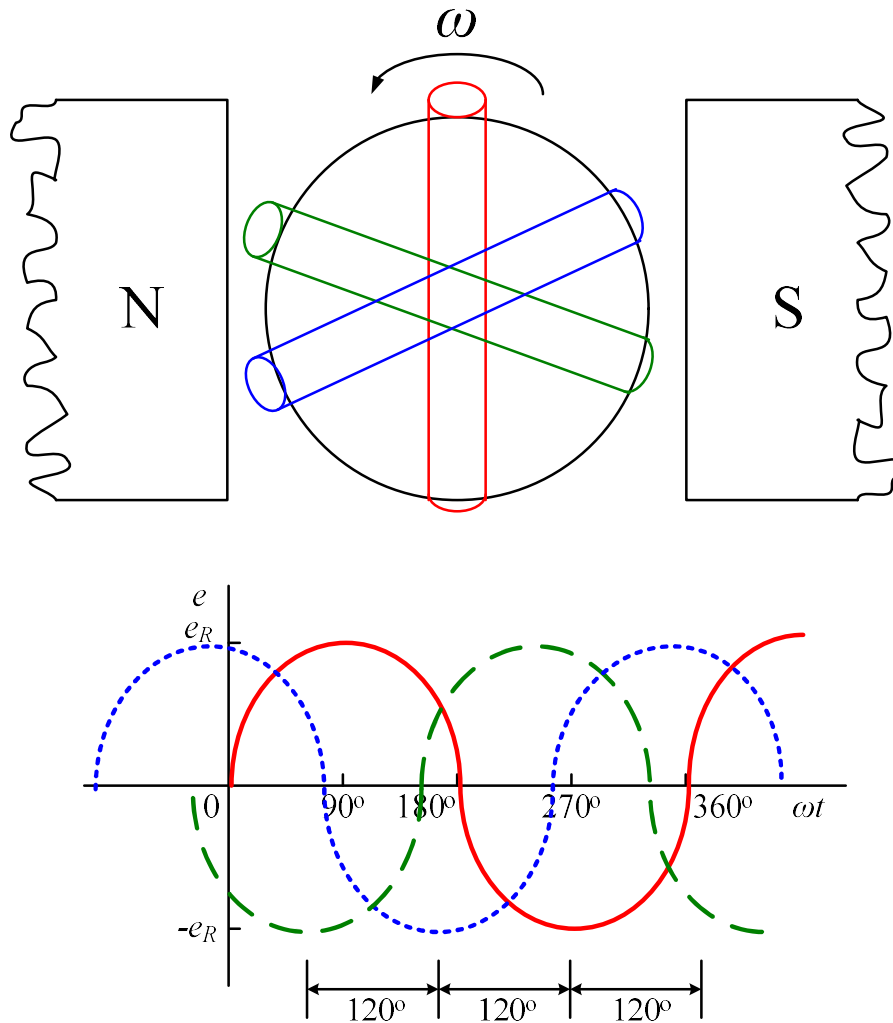


**Σχήμα 1.11 Παραγωγή μονοφασικής τάσης**

Μια **τριφασική παροχή** δημιουργείται όταν τρία πηνία βρίσκονται σε  $120^\circ$  το ένα από το άλλο και περιστρέφονται σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο όπως φαίνεται στο σχήμα 1.12. Το αποτέλεσμα είναι τρεις ανεξάρτητες πηγές ίσης ονομαστικής τιμής τάσης που διαφέρουν μεταξύ τους κατά  $120^\circ$ .

(i) Η σύμβαση που υιοθετείται για να αναγνωρίσουμε τις τρεις φασικές τάσεις είναι: Κ-κόκκινο, Π-πράσινο, και Μ-μπλε, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.12.

(ii) Η **διαδοχή φάσης** καθορίζεται από την διαδοχή με την οποία οι αγωγοί περνούν από το σημείο που αρχικά περνάει ο κόκκινο αγωγός.



Σχήμα 1.12 Παραγωγή τριφασικής τάσης

Μια τριφασική παροχή εναλλασσόμενου ρεύματος σχηματίζεται με τρεις αγωγούς οι οποίοι καλούνται "γραμμές". Τα ρεύματα σε αυτούς τους αγωγούς είναι γνωστά ως ρεύματα γραμμών (ΡΓ) και οι διαφορές δυναμικού ανάμεσα τους είναι γνωστές ως τάσης γραμμών (ΤΓ). Ένας τέταρτος αγωγός, που καλείται **ουδέτερος** (και συνδέεται μέσω μηχανισμών προστασίας με την γη) χρησιμοποιείται συχνά με μια τριφασική παροχή. Εάν τα τριφασικά τυλίγματα που παρουσιάζονται στο σχήμα 1.12 παραμείνουν ανεξάρτητα, τότε χρειάζονται έξι καλώδια για να συνδέσουν μία παροχή (όπως μια γεννήτρια) με ένα φορτίο (όπως ένας κινητήρας). Για να μειωθεί ο αριθμός των καλωδίων είναι σύνηθες να διασυνδέουμε τις τρεις φάσεις. Υπάρχουν δύο τρόποι με τους οποίους μπορεί να πραγματοποιηθεί αυτό και οι οποίοι είναι:

(α) η **σύνδεση αστέρα**, και (β) η **σύνδεση τριγώνου** ή **βρόχου**. Οι πηγές των τριφασικών παροχών, που χαρακτηρίζονται ως εναλλάκτες, συνήθως συνδέονται σε αστέρα, ενώ τα τριφασικά τυλίγματα των μετασχηματιστών, κινητήρων και άλλων φορτίων μπορούν να συνδεθούν είτε αστέρα είτε σε τρίγωνο.

### 1.2.1 Συνδεσμολογία αστέρα

- (i) Ένα φορτίο συνδεδεμένο σε αστέρα φαίνεται στο σχήμα 1.13 όπου οι τρεις γραμμές συνδέονται έκαστη με ένα φορτίο και οι έξοδοι των φορτίων συνδέονται όλες μαζί στο σημείο N για να σχηματίσουν αυτό που χαρακτηρίζεται ως **ουδέτερο σημείο ή σημείο αστέρα**.
- (ii) Οι τάσεις  $V_1$ ,  $V_2$  και  $V_3$  καλούνται **φασικές τάσεις** ή τάσεις γραμμής προς ουδέτερο. Γενικά οι φασικές τάσεις συμβολίζονται με  $V_p$ .
- (iii) Οι τάσεις  $V_{1-2}$ ,  $V_{2-3}$  και  $V_{3-1}$  καλούνται **πολικές τάσεις** ή **τάσεις γραμμής**.
- (iv) Από το σχήμα 1.13 φαίνεται ότι τα φασικά ρεύματα (γενικώς συμβολίζονται με  $I_p$ ) είναι ίσα με τα αντίστοιχα ρεύματα γραμμών  $I_1$ ,  $I_2$  και  $I_3$ , που σημαίνει ότι για σύνδεση αστέρα ισχύει:

$$I_L = I_p \quad (19)$$

- (v) Για ένα ισορροπημένο σύστημα ισχύει:

$$I_1 = I_2 = I_3 \quad (20)$$

$$V_1 = V_2 = V_3 \quad (21)$$

$$V_{1-2} = V_{2-3} = V_{3-1} \quad (22)$$

$$Z_{1-2} = Z_{2-3} = Z_{3-1} \quad (23)$$

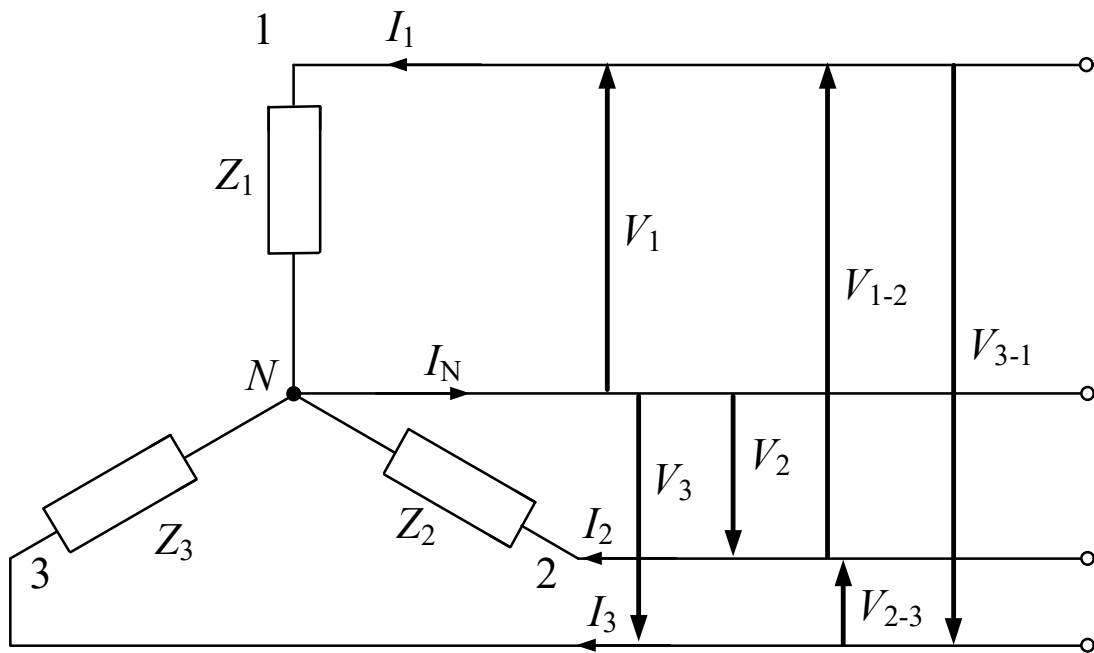
και το ρεύμα στον ουδέτερο αγωγό είναι  $I_N = 0$ .



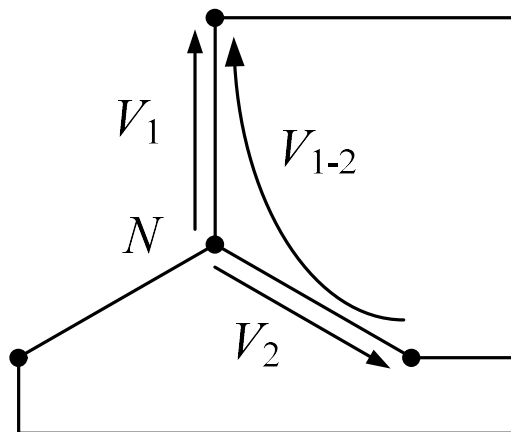
*Όταν ένα σύστημα συνδεδεμένο σε αστέρα είναι ισορροπημένο, τότε ο ουδέτερος αγωγός δεν είναι απαραίτητος και μπορεί να παραληφθεί.*

- (vi) Η πολική τάση,  $V_{1-2}$ , που φαίνεται στο σχήμα 1.14(α) δίνεται από την σχέση  $V_{1-2} = V_1 - V_2$  (η  $V_2$  είναι αρνητική αφού είναι σε αντίθετη διεύθυνση με την  $V_{1-2}$ ). Στο διάγραμμα φασιθετών του σχήματος 1.14(β), ο φασιθέτης  $V_2$  είναι ανεστραμμένος (φαίνεται με διακεκομμένη γραμμή) και προστίθεται διανυσματικά στην  $V_1$  (που σημαίνει  $V_{1-2} = V_1 + (-V_2)$ ). Από τριγωνομετρία, ή μέσω μέτρησης, προκύπτει ότι  $V_{1-2} = \sqrt{3}V_1$ , που σημαίνει ότι για μία σύνδεση ισορροπημένου αστέρα ισχύει:

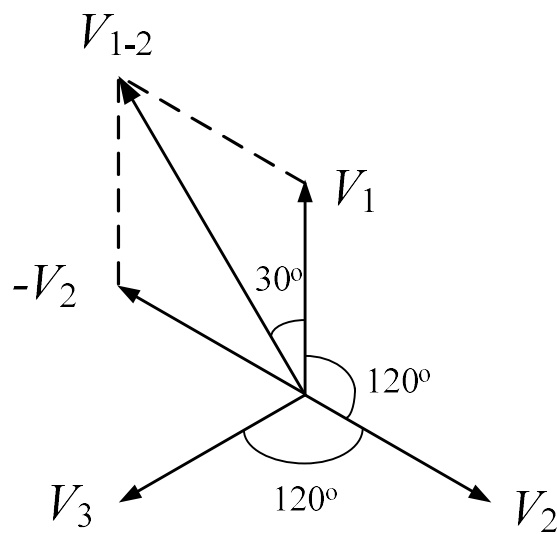
$$V_L = \sqrt{3}V_p \quad (24)$$



Σχήμα 1.13 Φορτίο συνδεσμοποιημένο σε αστέρα

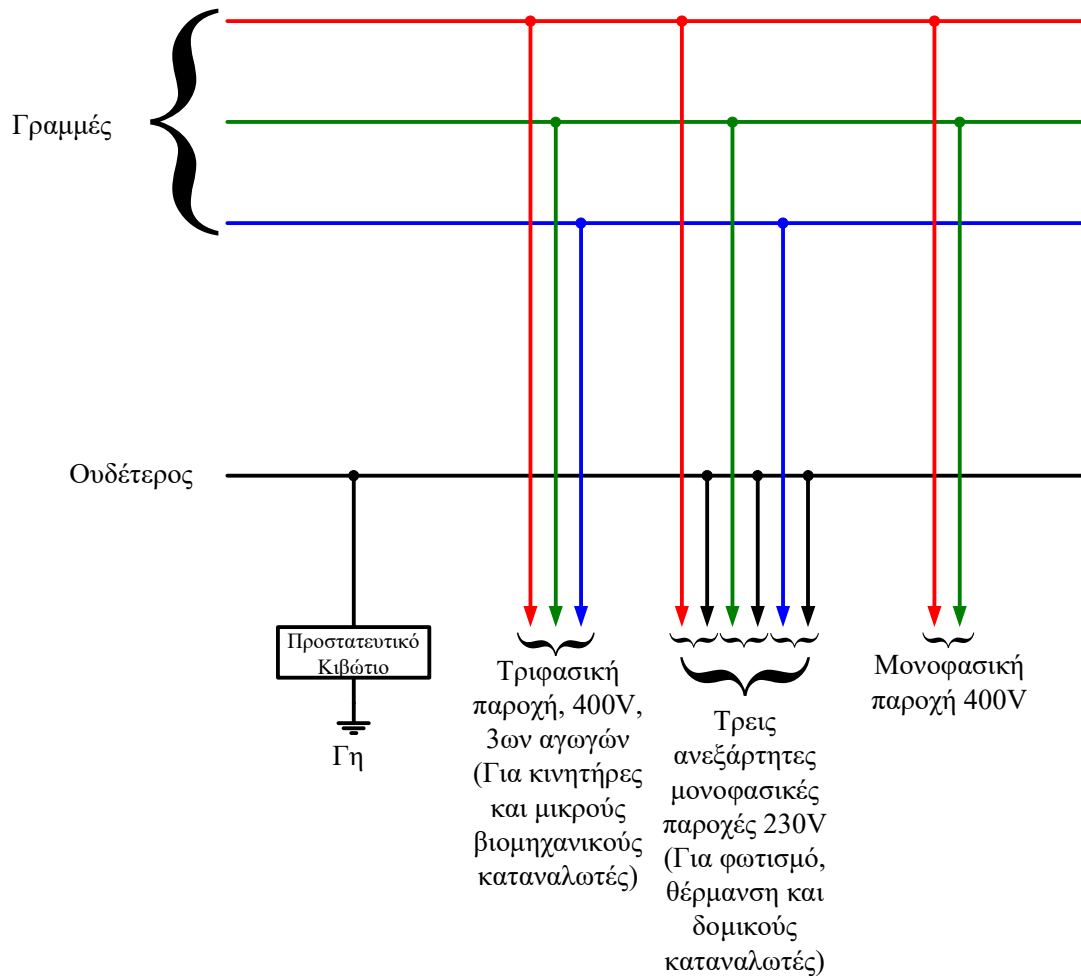


Σχήμα 1.14 (α) Ορισμός φασικής και πολικής τάσης



Σχήμα 1.14 (β) Διανοσηματικό διάγραμμα τάσεων

(vii) Η σύνδεση σε αστέρα των τριών φάσεων μιας παροχής, μαζί με τον ουδέτερο αγωγό, επιτρέπει την χρήση δύο τάσεων, της φασικής και της πολικής τάσης. Ένα σύστημα τεσσάρων αγωγών μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί όταν το φορτίο είναι μη ισορροπημένο. Η τυπική ηλεκτρική παροχή σε καταναλωτές στην πατρίδα μας είναι 400/230 V, 50 Hz, τριφασικό, τεσσάρων αγωγών εναλλασσόμενου ρεύματος, και ένα διάγραμμα των συνδέσεων φαίνεται στο σχήμα 1.15.



Σχήμα 1.15 Διάγραμμα δυνατών συνδέσεων μια παροχής

**Πρόβλημα 1.6.** Τρία φορτία, αντίστασης  $30\Omega$  το καθένα, σε συνδεσμολογία αστέρα συνδέονται σε μια τριφασική παροχή 400V. Να υπολογιστούν (α) η φασική τάση του συστήματος, (β) το φασικό ρεύμα και (γ) το ρεύμα γραμμής.

Η πολική τάση του συστήματος είναι  $V_L = 400V$

(α) Για την συνδεσμολογία αστέρα,

$$V_L = \sqrt{3}V_p \Rightarrow V_p = \frac{V_L}{\sqrt{3}} \Rightarrow V_p = \frac{400V}{\sqrt{3}} \Rightarrow V_p = 231V$$

(β) Το φασικό ρεύμα θα είναι  $I_p = \frac{V_p}{R_p} \Rightarrow I_p = \frac{231V}{30\Omega} = 7,7A$

(γ) Για την συνδεσμολογία αστέρα,  $I_p = I_L \Rightarrow I_L = 7,7A$

**Πρόβλημα 1.7.** Ένα φορτίο συνδεσμολογημένο σε αστέρα αποτελείται από τρία ίδια πραγματικά πηνία αντίστασης  $30\Omega$  και αυτεπαγωγής  $127,3mH$ . Εάν το ρεύμα γραμμής είναι  $5,08A$ , να υπολογιστεί η τάση γραμμής εάν η συχνότητα της παροχής είναι  $50\text{ Hz}$ .

Η επαγωγική αντίσταση είναι:  $X_L = 2\pi fL \Rightarrow X_L = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 127,3 \cdot 10^{-3} \Rightarrow X_L = 40\Omega$

Η σύνθετη αντίσταση ανά φάση είναι:

$$Z_L = \sqrt{R_L^2 + X_L^2} \Rightarrow Z_L = \sqrt{30^2 + 40^2} \Rightarrow Z_L = 50\Omega$$

Για την συνδεσμολογία αστέρα:  $I_L = I_p = \frac{V_p}{Z_p} \Rightarrow V_p = I_p Z_p = 5,08 \cdot 50 \Rightarrow V_p = 254V$ .

Επομένως η τάση γραμμής είναι:  $V_L = \sqrt{3}V_p \Rightarrow V_L = \sqrt{3} \cdot 254 \Rightarrow V_L = 440V$ .

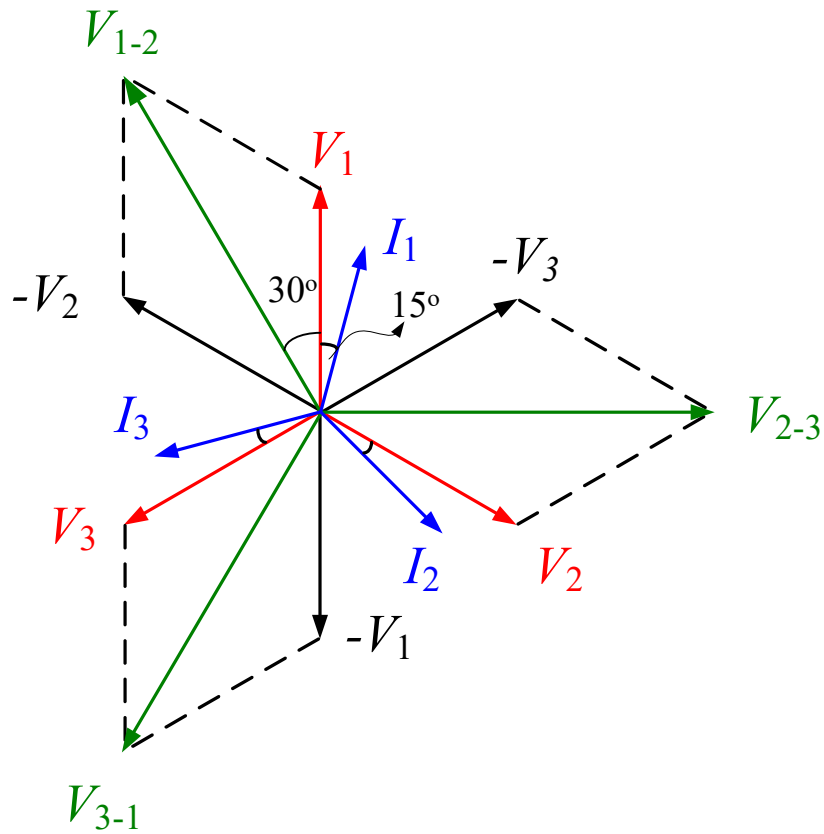
**Πρόβλημα 1.8.** Ένα ισορροπημένο, τριών αγωγών, τριφασικό φορτίο συνδεσμολογημένο σε αστέρα, έχει φασική τάση  $240V$ , ρεύμα γραμμής  $5A$  και συντελεστή ισχύος μεταπορείας  $0,966$ . Σχεδιάστε το πλήρες διανυσματικό διάγραμμα.

Διαδικασία για την κατασκευή του διανυσματικού διαγράμματος:

(i) Σχεδιάζουμε τις τάσεις  $V_1$ ,  $V_2$  και  $V_3$ , όπου  $V_1 = V_2 = V_3 = 240V$  και διαφέρουν μεταξύ τους κατά  $120^\circ$  η μία από την άλλη. (Σημειώνεται ότι η  $V_1$  είναι τοποθετημένη κατακόρυφα και με φορά προς τα πάνω, αλλά θα μπορούσε να είναι προς οποιαδήποτε διεύθυνση)

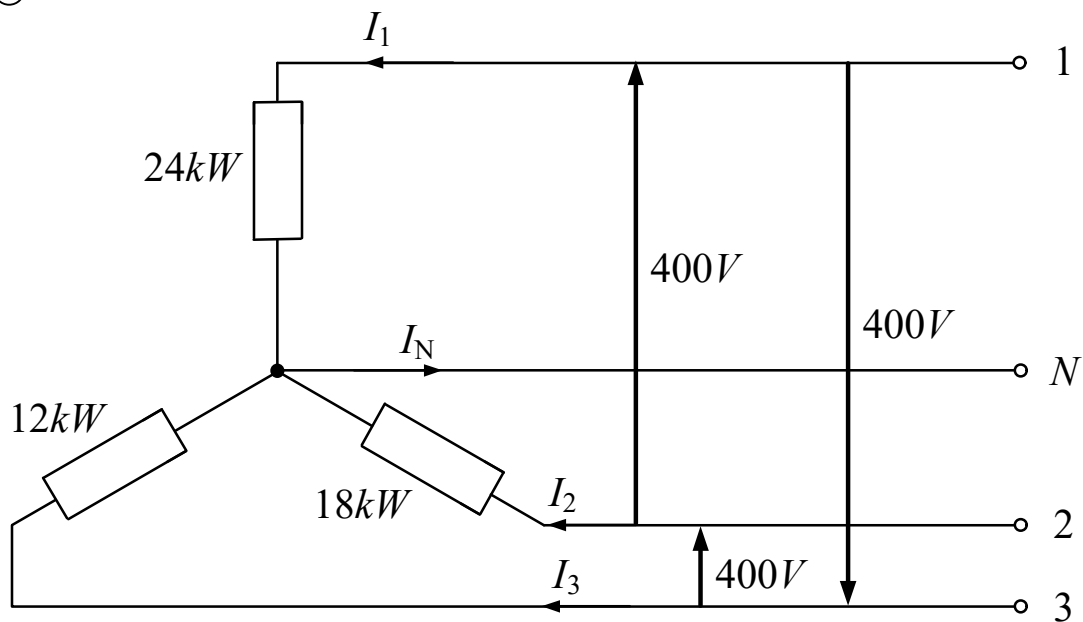
(ii) Ο συντελεστής ισχύος είναι:  $\cos \varphi = 0,966$  μεταπορείας. Επομένως η φασική γωνία του φορτίου είναι  $\varphi = \arccos(0,966) \Rightarrow \varphi = 15^\circ$  μεταπορείας. Έτσι  $I_1 = I_2 = I_3 = 5A$  που μεταπορούν των τάσεων  $V_1$ ,  $V_2$  και  $V_3$  κατά  $15^\circ$ , αντίστοιχα.

(iii)  $V_{1-2} = V_1 - V_2$  (διανυσματικά). Επομένως η  $V_2$  αντιστρέφεται και προστίθεται διανυσματικά στην  $V_1$ . Από μέτρηση, η  $V_{1-2}$  είναι  $V_{1-2} = 415V$  (δηλαδή,  $\sqrt{3} \cdot 240V$ ) και προπορεύεται της  $V_1$  κατά  $30^\circ$ . Ομοίως,  $V_{2-3} = V_2 - V_3$  και  $V_{3-1} = V_3 - V_1$ .



Σχήμα 1.16 Διανυσματικό διάγραμμα τάσεων-ρευμάτων για το πρόβλημα 1.8

**Πρόβλημα 1.9.** Ένα 400V, τριφασικό σύστημα, τεσσάρων αγωγών, συνδεσμοποιημένο σε αστέρα, τροφοδοτεί τρία ωμικά φορτία όπως φαίνεται στο σχήμα 1.17. Να υπολογιστεί (α) το ρεύμα σε κάθε γραμμή και (β) το ρεύμα του ουδέτερου αγωγού.



Σχήμα 1.17 Τριφασικό σύστημα για το πρόβλημα 1.9

(α) Για ένα συνδεδεμένο σε αστέρα σύστημα ισχύει  $V_L = \sqrt{3}V_p \Rightarrow V_p = \frac{V_L}{\sqrt{3}} \Rightarrow V_p = \frac{400V}{\sqrt{3}} \Rightarrow V_p = 231V$ .

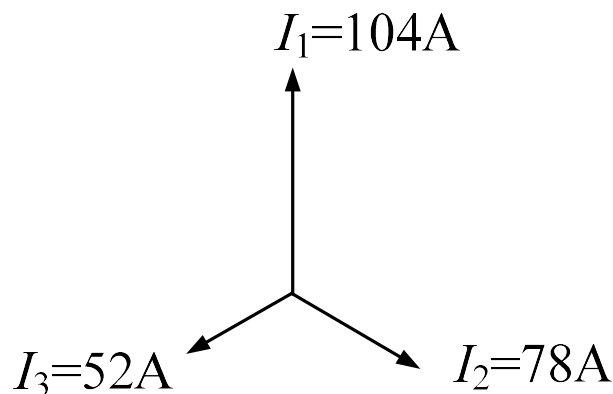
Επίσης για ένα ωμικό φορτίο το ρεύμα θα δίνεται από την σχέση  $I = \frac{P}{V}$ . Επομένως για κάθε ωμικό φορτίο θα έχουμε:

$$I_1 = \frac{P_1}{V_1} = \frac{24000W}{231V} \Rightarrow I_1 = 104A$$

$$I_2 = \frac{P_2}{V_2} = \frac{18000W}{231V} \Rightarrow I_2 = 78A$$

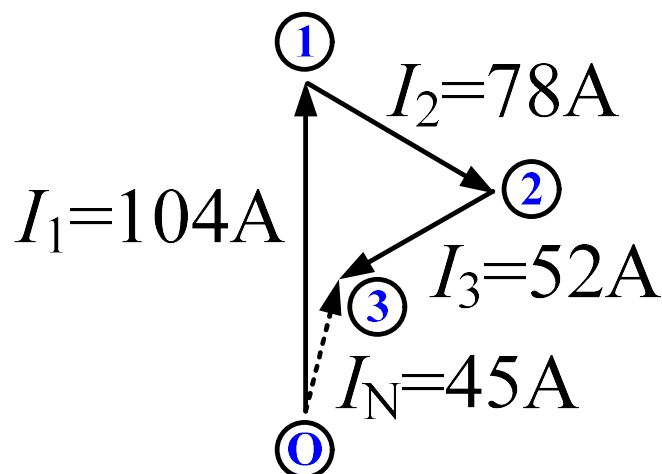
$$I_3 = \frac{P_3}{V_3} = \frac{12000W}{231V} \Rightarrow I_3 = 52A$$

(β) Τα τρία ρεύματα γραμμών φαίνονται στο διανυσματικό διάγραμμα του σχήματος 1.18. Αφού κάθε φορτίο είναι ωμικό τα ρεύματα είναι συμφασικά με τις φασικές τάσεις και απέχουν διανυσματικά μεταξύ τους κατά  $120^\circ$ . Το ρεύμα στον ουδέτερο αγωγό δίνεται από την σχέση:  $I_N = I_1 + I_2 + I_3$  διανυσματικά.



Σχήμα 1.18 Διανυσματικό διάγραμμα ρευμάτων για το πρόβλημα 1.9(β)

Το σχήμα 1.19 δείχνει τα τρία ρεύματα γραμμών τα οποία προστίθενται διανυσματικά.



Σχήμα 1.19 Διανυσματικό άθροισμα ρευμάτων για το πρόβλημα 1.9(β)



Το διάνυσμα  $O_1$  αναπαριστά το ρεύμα  $I_1$  σε μέτρο και διεύθυνση. Από το πέρας του διανύσματος  $O_1$ , σχεδιάζουμε το διάνυσμα  $1_2$  το οποίο αναπαριστά το ρεύμα  $I_2$  σε μέτρο και διεύθυνση. Από το πέρας του διανύσματος  $1_2$ , σχεδιάζουμε το διάνυσμα  $2_3$  το οποίο αναπαριστά το ρεύμα  $I_3$  σε μέτρο και διεύθυνση. Το προκύπτων διάνυσμα  $O_3$  αναπαριστά το διάνυσμα  $I_N$ .

Από μέτρηση,  $I_N = 45\text{A}$ .

Εναλλακτικά, από υπολογισμό, λαμβάνοντας υπόψη ότι το  $I_1$  έχει όρισμα  $90^\circ$ , το  $I_2$   $210^\circ$  και το  $I_3$   $330^\circ$ , θα έχουμε:

Οριζόντια συνιστώσα,  $104 \cos 90^\circ + 78 \cos 330^\circ + 52 \cos 210^\circ = 22,5$

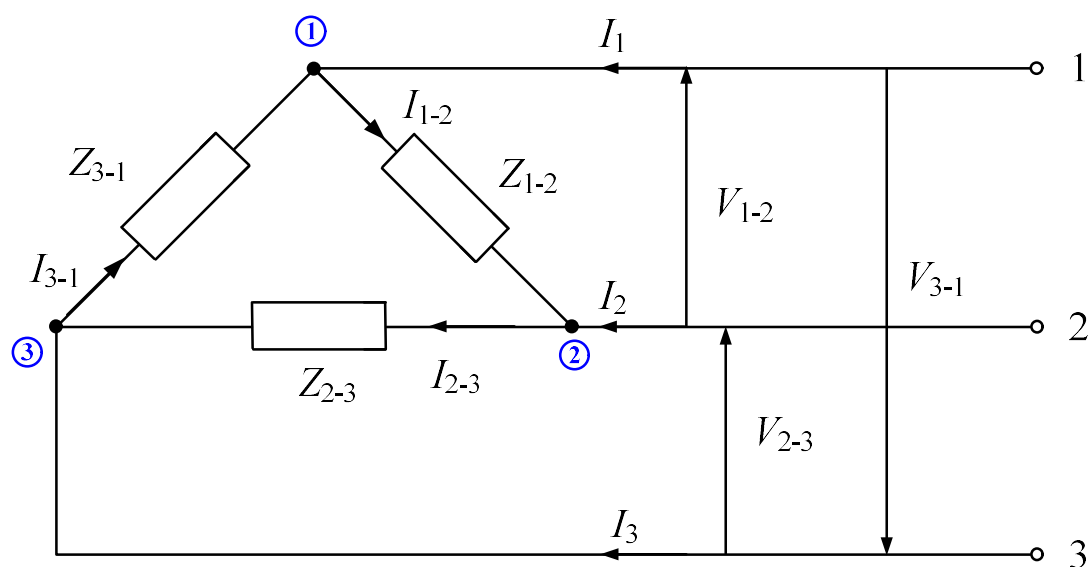
Κατακόρυφη συνιστώσα,  $104 \sin 90^\circ + 78 \sin 330^\circ + 52 \sin 210^\circ = 39,0$

Επομένως το μέτρο του ρεύματος  $I_N$  θα είναι  $\sqrt{22,5^2 + 39,0^2} = 45\text{A}$ .

### 1.2.2 Συνδεσμολογία τριγώνου

- (i) Ένα φορτίο συνδεσμολογημένο σε **τρίγωνο** ή **(βρόχο)** φαίνεται στο Σχήμα 1.20 όπου το τέλος του ενός φορτίου συνδέεται με την αρχή του άλλου.
- (ii) Από το σχήμα 1.20, φαίνεται ότι οι τάσεις γραμμής  $V_{1-2}$ ,  $V_{2-3}$  και  $V_{3-1}$  είναι αντίστοιχες των φασικών τάσεων, που σημαίνει ότι για την συνδεσμολογία αστέρα ισχύει:

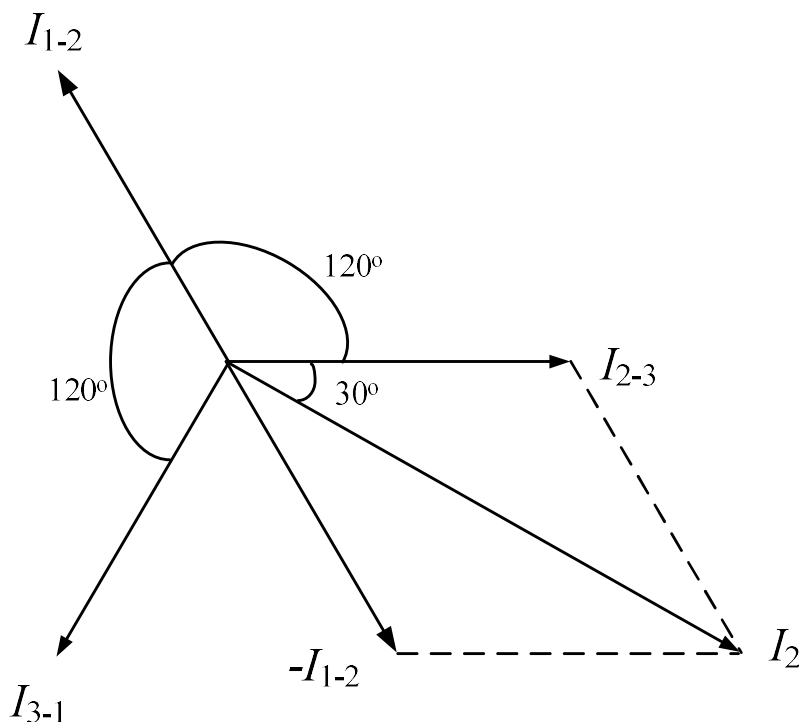
$$V_L = V_p \quad (25)$$



Σχήμα 1.20 Φορτίο συνδεσμολογημένο σε τρίγωνο

- (iii) Χρησιμοποιώντας τον νόμο ρευμάτων του Kirchhoff στο σχήμα 1.20, έχουμε  $I_1 = I_{1-2} - I_{3-1} = I_{1-2} + (-I_{3-1})$ . Από το διανυσματικό διάγραμμα του σχήματος 1.21, με τριγωνομετρία ή από μέτρηση, προκύπτει  $I_1 = \sqrt{3}I_{1-2}$ , που σημαίνει ότι για την συνδεσμολογία τριγώνου ισχύει:

$$I_L = \sqrt{3}I_p \quad (26)$$



Σχήμα 1.21 Διανυσματικό διάγραμμα ρευμάτων για συνδεσμολογία τριγώνου

**Πρόβλημα 1.10.** Τρία πανομοιότυπα πραγματικά πηνία αντίστασης  $30\Omega$  και αυτεπαγωγής  $127,3\text{mH}$  το καθένα συνδέονται σε τρίγωνο και τροφοδοτούνται από μία τριφασική παροχή  $440\text{V}$ ,  $50\text{Hz}$ . Να υπολογιστούν (α) το φασικό ρεύμα και (β) το ρεύμα γραμμής.

Η επαγωγική αντίδραση είναι:  $X_L = 2\pi fL \Rightarrow X_L = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 127,3 \cdot 10^{-3} \Rightarrow X_L = 40\Omega$

Η σύνθετη αντίσταση ανά φάση είναι:

$$Z_L = \sqrt{R_L^2 + X_L^2} \Rightarrow Z_L = \sqrt{30^2 + 40^2} \Rightarrow Z_L = 50\Omega$$

(α) Το φασικό ρεύμα είναι:  $I_p = \frac{V_p}{Z_p} = \frac{V_L}{Z_p} = \frac{440\text{V}}{50\Omega} \Rightarrow I_p = 8,8\text{A}$ .

(β) Για την συνδεσμολογία τριγώνου,  $I_L = \sqrt{3}I_p \Rightarrow I_L = \sqrt{3} \cdot 8,8 \Rightarrow I_L = 15,24\text{A}$ .



Όταν ένα φορτίο συνδέεται σε τρίγωνο, το ρεύμα γραμμής που δίνεται από την παροχή είναι τριπλάσιο του αντιστοίχου, όταν το φορτίο συνδέεται σε αστέρα.

**Πρόβλημα 1.11.** Τρεις πανομοιότυποι πυκνωτές συνδέονται σε συνδεσμολογία τριγώνου και τροφοδοτούνται από μία τριφασική παροχή  $415\text{V}$  και  $50\text{Hz}$ . Εάν το ρεύμα γραμμής είναι  $15\text{A}$ , να υπολογιστεί η χωρητικότητα του κάθε πυκνωτή.

Για την συνδεσμολογία τριγώνου ισχύει:

$$I_L = \sqrt{3}I_p \Rightarrow I_p = \frac{I_L}{\sqrt{3}} \Rightarrow I_p = \frac{15}{\sqrt{3}} \Rightarrow I_p = 8,66\text{A}.$$

Η χωρητική αντίσταση ανά φάση είναι  $X_C = \frac{V_p}{I_p} = \frac{V_L}{I_p}$ , αφού για την συνδεσμολογία

τριγώνου ισχύει  $V_p = V_L$ . Επομένως  $X_C = \frac{V_L}{I_p} = \frac{415\text{V}}{8,66\text{A}} \Rightarrow X_C = 47,92\Omega$ . Όμως

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \Rightarrow X_C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} \Rightarrow C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot X_C} \Rightarrow C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 47,92} \Rightarrow C = 66,43\mu\text{F}$$

**Πρόβλημα 1.12.** Τρία πηνία που το καθένα έχει ωμική αντίσταση  $3\Omega$  και επαγωγική αντίσταση  $4\Omega$  συνδέονται (i) σε αστέρα και (ii) σε τρίγωνο και τροφοδοτούνται από μία τριφασική παροχή  $415\text{V}$ . Να υπολογιστούν για κάθε σύνδεση (α) η φασική τάση και η τάση γραμμής και (β) το φασικό ρεύμα και το ρεύμα γραμμής.

(i) Για την συνδεσμολογία αστέρα:  $I_L = I_p$  και  $V_L = \sqrt{3}V_p$ .

(α) Η τάση γραμμής θα είναι  $V_L = 415\text{V}$ , ενώ η φασική τάση θα είναι

$$V_p = \frac{V_L}{\sqrt{3}} \Rightarrow V_p = 240\text{V}$$

(β) Η σύνθετη αντίσταση ανά φάση θα είναι

$$Z_p = \sqrt{R^2 + X_L^2} \Rightarrow Z_p = \sqrt{3^2 + 4^2} \Rightarrow Z_p = 5\Omega.$$

Το φασικό ρεύμα υπολογίζεται ως  $I_p = \frac{V_p}{Z_p} = \frac{240\text{V}}{5\Omega} \Rightarrow I_p = 48\text{A}$ .

Το ρεύμα γραμμής θα είναι επίσης  $I_L = I_p = 48\text{A}$ .

(ii) Για την συνδεσμολογία τριγώνου:  $V_L = V_p$  και  $I_L = \sqrt{3}I_p$ .

(α) Η τάση γραμμής είναι  $V_L = 415\text{V}$

Η φασική τάση θα είναι επίσης  $V_p = V_L = 415\text{V}$ .

(β) Το φασικό ρεύμα είναι  $I_p = \frac{V_p}{Z_p} = \frac{415\text{V}}{5\Omega} \Rightarrow I_p = 83\text{A}$ , ενώ το ρεύμα γραμμής θα

είναι  $I_L = \sqrt{3}I_p \Rightarrow I_L = \sqrt{3} \cdot 83 \Rightarrow I_L = 144\text{A}$ .

### 1.2.3 Ισχύς σε τριφασικό σύστημα

Η καταναλισκόμενη ισχύς σε ένα τριφασικό φορτίο δίνεται από το άθροισμα της καταναλισκόμενης ισχύος σε κάθε φάση. Εάν ένα φορτίο είναι ισορροπημένο τότε η συνολική ισχύς  $P$  δίνεται από την σχέση:  $P = 3 \cdot$  καταναλισκόμενη ισχύ μίας φάσης.

Η καταναλισκόμενη ισχύς σε μία φάση είναι  $I_p^2 \cdot R_p$  ή  $V_p \cdot I_p \cdot \cos \varphi$ , όπου  $\varphi$  η διαφορά φάσης μεταξύ  $V_p$  και  $I_p$ .

Για την **συνδεσμολογία αστέρα**,  $V_p = V_L$  και  $I_p = \frac{I_L}{\sqrt{3}}$ . Επομένως:

$$P = 3 \cdot \left( \frac{V_L}{\sqrt{3}} \right) \cdot I_L \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos \varphi \quad (27-i)$$

Για την **συνδεσμολογία τριγώνου**,  $I_p = I_L$  και  $V_p = \frac{V_L}{\sqrt{3}}$ . Επομένως:

$$P = 3 \cdot V_L \cdot \left( \frac{I_L}{\sqrt{3}} \right) \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos \varphi \quad (27-ii)$$

Συνεπώς είτε για συνδεσμολογία ισορροπημένου αστέρα, είτε ισορροπημένου τριγώνου η συνολική ισχύς  $P$  δίνεται από την σχέση:

$$P = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos \varphi \text{ σε } (W) \quad (28)$$

ή

$$P = 3 \cdot I_p^2 \cdot R_p \text{ σε } (W) \quad (29)$$

Τα συνολικά  $VA$ , θα δίνονται από την σχέση:

$$S = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \text{ σε } (VA) \quad (30)$$

**Πρόβλημα 1.13.** Τρεις αντιστάσεις  $12\Omega$  που συνδέονται σε αστέρα, τροφοδοτούνται από μία τριφασική παροχή  $415V$ . Να υπολογιστεί η συνολική ισχύς που καταναλώνεται στις αντιστάσεις.

Η ισχύς που καταναλώνεται είναι  $P = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos \varphi$  ή  $P = 3 \cdot I_p^2 \cdot R_p$ .

Η τάση γραμμής είναι  $V_L = 415V$  και η φασική τάση

$$V_p = \frac{V_L}{\sqrt{3}} = \frac{415V}{\sqrt{3}} = 240V \text{ (αντιστάσεις συνδεσμολογημένες σε αστέρα).}$$

$$\text{Το φασικό ρεύμα θα είναι } I_p = \frac{V_p}{Z_p} = \frac{V_p}{R_p} = \frac{240V}{12\Omega} \Rightarrow I_p = 20A.$$

Στην συνδεσμολογία αστέρα  $I_L = I_p = 20A$ .

Για ένα καθαρά ωμικό φορτίο, ο συντελεστής ισχύος είναι  $\cos \varphi = 1$ . Επομένως:

$$P = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 415 \cdot 20 \cdot 1 \Rightarrow P = 14,4kW$$

ή

$$P = 3 \cdot I_p^2 \cdot R_p = 3 \cdot 20^2 \cdot 12 \Rightarrow P = 14,4kW.$$

**Πρόβλημα 1.14.** Η ισχύς εισόδου ενός τριφασικού κινητήρα εναλλασσόμενου ρεύματος μετριέται  $5kW$ . Εάν το ρεύμα και η τάση στον κινητήρα είναι  $400V$  και  $8,6A$  αντίστοιχα, να υπολογιστεί ο συντελεστής ισχύος του συστήματος.

Η ισχύς είναι ίση με  $P = 5000W$ , η τάση γραμμής  $V_L = 400V$  και το ρεύμα γραμμής  $I_L = 8,6A$ . Αφού  $P = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos \varphi$ , ο συντελεστής ισχύος θα είναι

$$\cos \varphi = \frac{P}{\sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L} = \frac{5000}{\sqrt{3} \cdot 400 \cdot 8,6} = 0,84.$$

**Πρόβλημα 1.15.** Τρία πανομοιότυπα πηνία, ωμικής αντίστασης  $10\Omega$  και αυτεπαγωγής  $42mH$ , το καθένα, συνδέονται (α) σε αστέρα και (β) σε τρίγωνο και τροφοδοτούνται από μία τριφασική πηγή  $415V, 50Hz$ . Να υπολογιστεί η συνολική ισχύς που καταναλώνεται σε κάθε περίπτωση.

**(α) Συνδεσμολογία αστέρα**

Επαγωγική αντίσταση:  $X_L = 2\pi fL \Rightarrow X_L = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 42 \cdot 10^{-3} \Rightarrow X_L = 13,19\Omega$ .

Ανά φάση σύνθετη αντίσταση:

$$Z_p = \sqrt{R^2 + X_L^2} \Rightarrow Z_p = \sqrt{10^2 + 13,19^2} \Rightarrow Z_p = 16,55\Omega.$$

Τάση γραμμής:  $V_L = 415V$ .

$$\text{Φασική τάση: } V_p = \frac{V_L}{\sqrt{3}} = \frac{415}{\sqrt{3}} \Rightarrow V_p = 240V.$$

$$\text{Φασικό ρεύμα: } I_p = \frac{V_p}{Z_p} = \frac{V_p}{R_p} = \frac{240V}{16,55\Omega} \Rightarrow I_p = 14,50A.$$

Ρεύμα γραμμής:  $I_L = I_p = 14,50A$ .

$$\text{Συντελεστής ισχύος: } \cos \varphi = \frac{R_p}{Z_p} = \frac{10}{16,55} = 0,6042 \text{ μεταφορείας.}$$

**Καταναλισκόμενη ισχύς:**

$$P = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 415 \cdot 14,50 \cdot 0,6042 \Rightarrow P = 6,3kW$$

ή

$$P = 3 \cdot I_p^2 \cdot R_p = 3 \cdot 14,50^2 \cdot 10 \Rightarrow P = 6,3kW.$$

**(β) Συνδεσμολογία τριγώνου**

Από το πρώτο ερώτημα  $V_L = V_p = 415V$ ,  $Z_p = 16,55\Omega$ ,  $\cos \varphi = 0,6042$  μεταφορείας.

$$\text{Φασικό ρεύμα: } I_p = \frac{V_p}{Z_p} = \frac{V_p}{R_p} = \frac{415V}{16,55\Omega} \Rightarrow I_p = 25,08A.$$

Ρεύμα γραμμής:  $I_L = \sqrt{3} \cdot I_p = \sqrt{3} \cdot 25,08 = 43,44A$ .

**Καταναλισκόμενη ισχύς:**

$$P = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 415 \cdot 43,44 \cdot 0,6042 \Rightarrow P = 18,87kW$$

ή

$$P = 3 \cdot I_p^2 \cdot R_p = 3 \cdot 25,08^2 \cdot 10 \Rightarrow P = 18,87kW.$$



Φορτία που είναι συνδεδεμένα σε τρίγωνο καταναλώνουν τρεις φορές περισσότερη ισχύ από ότι όταν συνδέονται σε αστέρα, και επίσης απορροφούν τρεις φορές μεγαλύτερο ρεύμα γραμμής.

**Πρόβλημα 1.16.** Ένας τριφασικός κινητήρας εναλλασσομένου 415V έχει ισχύ εξόδου 12.75kW και λειτουργεί με συντελεστή ισχύος μεταφορείας 0,77 και με βαθμό απόδοσης 85%. Εάν ο κινητήρας είναι συνδεδεμένος σε τρίγωνο, να υπολογιστούν (α) η ισχύς εξόδου, (β) το ρεύμα γραμμής και (γ) το φασικό ρεύμα.

(α) Ο βαθμός απόδοσης δίνεται ως:

$$n\% = \frac{P_{out}}{P_{in}} \cdot 100\% \Rightarrow P_{out} = \frac{n\% \cdot P_{in}}{100\%} \Rightarrow P_{out} = \frac{85\% \cdot 12750}{100\%} \Rightarrow P_{out} = 15000W$$

ή  $P_{out} = 15kW$ .

(β) Ισχύει:

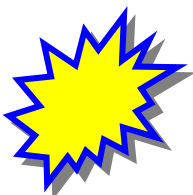
$$P = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos \varphi \Rightarrow I_L = \frac{P}{\sqrt{3} \cdot V_L \cdot \cos \varphi} \Rightarrow I_L = \frac{15000}{\sqrt{3} \cdot 415 \cdot 0,77} \Rightarrow I_L = 27,10A$$

(γ) Για την συνδεσμολογία τριγώνου ισχύει:  $I_L = \sqrt{3} \cdot I_p$ .

$$\text{Επομένως: } I_p = \frac{I_L}{\sqrt{3}} = \frac{27,10}{\sqrt{3}} \Rightarrow I_p = 15,65A.$$

#### 1.2.4 Σύγκριση συνδεσμολογιών αστέρα και τριγώνου

- (i) Τα φορτία που συνδέονται σε τρίγωνο καταναλώνουν τρεις φορές μεγαλύτερη ισχύ από ότι εάν συνδέονταν σε αστέρα, για την ίδια πάντοτε παροχή.
- (ii) Για την ίδια ισχύ, τα φασικά ρεύματα πρέπει να είναι τα ίδια και στις δύο συνδεσμολογίες αστέρα και τριγώνου (αφού  $P = 3 \cdot I_p^2 \cdot R_p$ ), επομένως το ρεύμα γραμμής στη συνδεσμολογία τριγώνου είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο στην συνδεσμολογία αστέρα. Για να επιτευχθεί το ίδιο φασικό ρεύμα στην συνδεσμολογία αστέρα, όπως σε αυτή του τριγώνου, η τάση γραμμής στην συνδεσμολογία αστέρα είναι  $\sqrt{3}$  φορές μεγαλύτερη από την τάση γραμμής στην συνδεσμολογία τριγώνου.



Για μια δεδομένη μεταφορά ισχύος, η συνδεσμολογία τριγώνου σχετίζεται με μεγαλύτερα ρεύματα γραμμής (και επομένως με αγωγούς μεγαλύτερης διατομής) και η συνδεσμολογία αστέρα με μεγαλύτερες τάσεις γραμμής (και επομένως μεγαλύτερη μόνωση).

### 1.2.5 Πλεονεκτήματα τριφασικών συστημάτων

Τα πλεονεκτήματα των τριφασικών συστημάτων έναντι των μονοφασικών παροχών περιλαμβάνουν:

- (i) Για μια δεδομένη ποσότητα ισχύος που μεταφέρεται μέσω του συστήματος, το τριφασικό σύστημα απαιτεί αγωγούς με μικρότερη διατομή. Αυτό σημαίνει εξοικονόμηση χαλκού (ή αλουμινίου) και έτσι το κόστος εγκατάστασης είναι μικρότερο.
- (ii) Είναι διαθέσιμες δύο τάσεις.
- (iii) Οι τριφασικοί κινητήρες είναι πολύ συμπαγείς, σχετικά φθηνοί, γενικά μικρότεροι, έχουν δυνατότητα αυτό-εκκίνησης, παρέχουν σταθερότερη έξοδο και απαιτούν λιγότερη συντήρηση συγκρινόμενοι με τους μονοφασικούς κινητήρες.

### 1.3 Μέτρηση της ισχύος σε ένα κύκλωμα

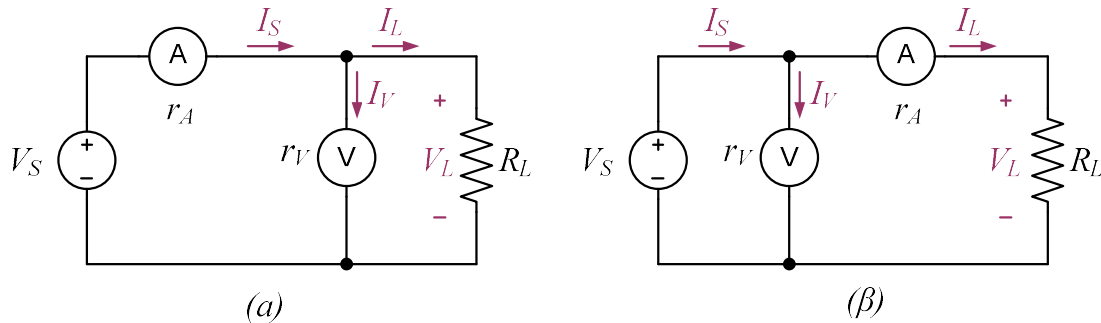
#### 1.3.1 Μέτρηση της πραγματικής ισχύος με αμπερόμετρο και βολτόμετρο

Όλες οι αρχές λειτουργίας των αμπερομέτρων και βολτομέτρων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την έμμεση μέτρηση της ισχύος. Το γινόμενο των ενδείξεων των δύο οργάνων παρέχει την τιμή της μετρούμενης πραγματικής ισχύος που καταναλώνεται στο φορτίο. Εάν  $P_L$  είναι η πραγματική ισχύς που καταναλώνεται στο φορτίο, τότε θα ισχύει:

$$P_L = V_L \cdot I_L \quad (31)$$

όπου  $V_L$  είναι η τάση στα άκρα του φορτίου και  $I_L$  το ρεύμα που το διαρρέει.

Οι δύο δυνατές συνδεσμολογίες για την έμμεση μέτρηση της ισχύος δίνονται στο σχήμα 1.22.



Σχήμα 1.22 Διατάξεις μέτρησης πραγματικής ισχύος με αμπερόμετρο και βολτόμετρο

Στην διάταξη του σχήματος 1.22 (α), οι ενδείξεις των δύο οργάνων είναι  $V_L$  και  $I_S$ , αντίστοιχα. Από τον πρώτο κανόνα του Kirchhoff προκύπτει:

$$I_S = I_L + I_V = I_L + \frac{V_L}{r_V} \quad (32)$$

Η μετρούμενη ισχύς, βάσει των ενδείξεων των οργάνων, είναι:

$$P_W = V_L \cdot I_S = V_L \cdot \left( I_L + \frac{V_L}{r_V} \right) \Rightarrow P_W = V_L \cdot I_L + \frac{V_L^2}{r_V} \Rightarrow$$

$$P_W = P_L + \frac{V_L^2}{r_V} \quad (33)$$

Στην διάταξη του σχήματος 1.22 (β), οι ενδείξεις των δύο οργάνων είναι  $V_S$  και  $I_L$ , αντίστοιχα. Από τον δεύτερο κανόνα του Kirchhoff προκύπτει:

$$V_S = V_L + r_A \cdot I_L \quad (34)$$

Η μετρούμενη ισχύς, βάσει των ενδείξεων των οργάνων, είναι:

$$P_W = V_S \cdot I_L = (V_L + r_A \cdot I_L) \cdot I_L = V_L \cdot I_L + r_A \cdot I_L^2 \Rightarrow$$

$$P_W = P_L + r_A \cdot I_L^2 \quad (35)$$

Από τις εξισώσεις (33) και (35) είναι προφανές ότι:  $P_W \neq P_L$ .

**Πρόβλημα 1.17.** Για τα κυκλώματα του σχήματος 1.22, να υπολογιστούν τα σφάλματα μέτρησης που διαπράττονται.

Το σχετικό σφάλμα που διαπράττεται με την διάταξη μέτρησης του σχήματος 1.22 (α) είναι:

$$F_P = \frac{P_W - P_L}{P_L} = \frac{V_L \cdot \left( I_L + \frac{V_L}{r_V} \right) - V_L \cdot I_L}{V_L \cdot I_L} = \frac{V_L \cdot I_L + V_L \cdot \frac{V_L}{r_V} - V_L \cdot I_L}{V_L \cdot I_L} \Rightarrow F_P = \frac{\frac{V_L^2}{r_V}}{V_L \cdot I_L} = \frac{V_L^2 \cdot R_L}{V_L^2 \cdot r_V} \Rightarrow$$

$$F_P = \frac{R_L}{r_V} .$$

Αντίστοιχα, το σχετικό σφάλμα που διαπράττεται με την διάταξη μέτρησης του σχήματος 1.22 (β) είναι:

$$F_P = \frac{P_W - P_L}{P_L} = \frac{(V_L + r_A \cdot I_L) \cdot I_L - V_L \cdot I_L}{V_L \cdot I_L} = \frac{V_L \cdot I_L + r_A \cdot I_L^2 - V_L \cdot I_L}{(R_L \cdot I_L) \cdot I_L} \Rightarrow F_P = \frac{r_A \cdot I_L^2}{R_L \cdot I_L^2} \Rightarrow$$

$$F_P = \frac{r_A}{R_L} .$$



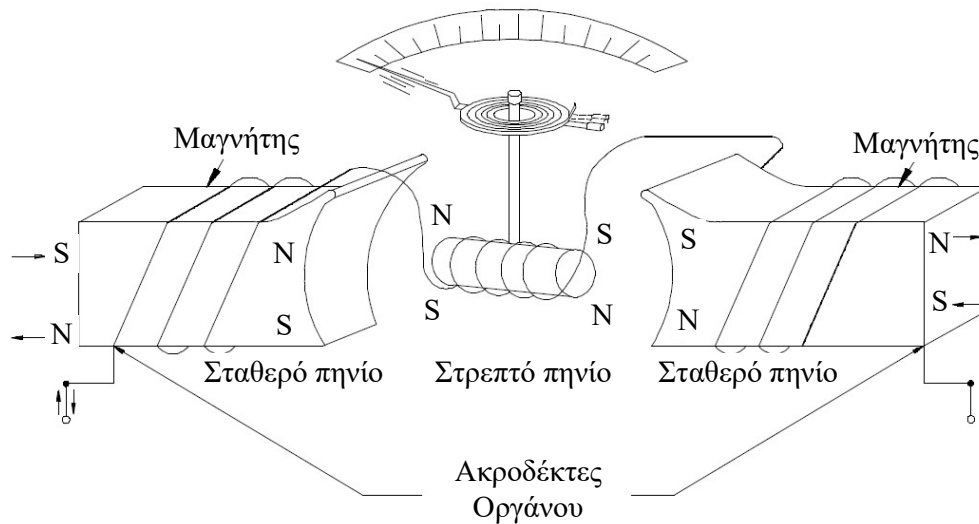
**Η διάταξη του σχήματος 1.22 (α) χρησιμοποιείται για μέτρηση ισχύος σε αντιστάσεις μικρής τιμής, ενώ η διάταξη του σχήματος 1.22 (β) χρησιμοποιείται για μέτρηση ισχύος σε αντιστάσεις μεγάλης τιμής.**



### 1.3.2 Μέτρηση της ισχύος με βαττόμετρο

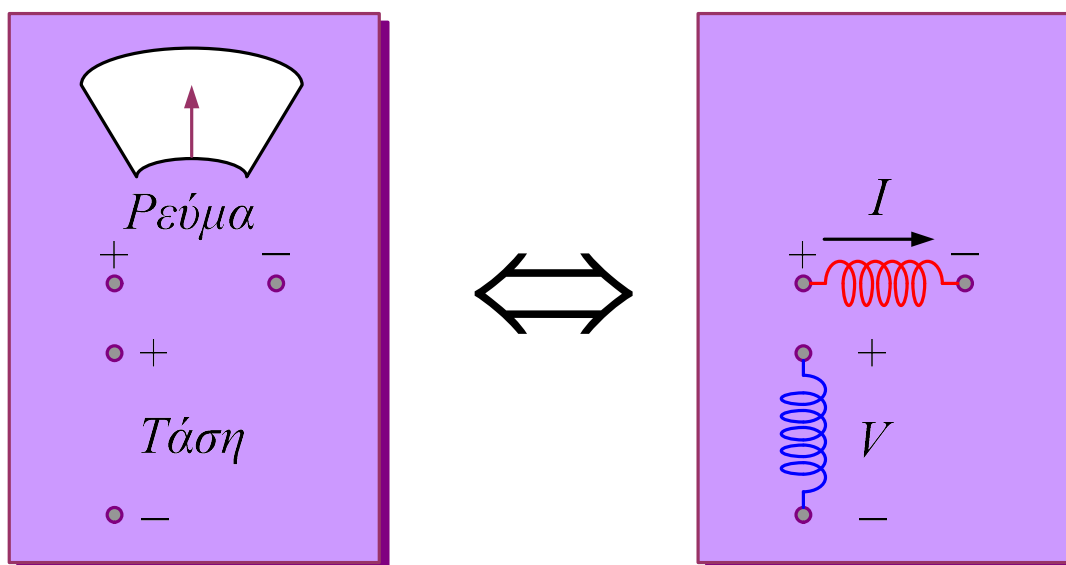
#### 1.3.2.1 Βασική αρχή λειτουργίας βαττομέτρου

Το όργανο που χρησιμοποιείται για την άμεση μέτρηση της ισχύος ονομάζεται **βαττόμετρο**. Η λειτουργία του βασίζεται στην κίνηση του ηλεκτροδυναμομέτρου, σχήμα 1.23, το οποίο έχει την ίδια βασική αρχή λειτουργίας με την κίνηση του μετρητή D'Arsonval. Η μόνη διαφορά είναι ότι οι μόνιμοι μαγνήτες, έχουν αντικατασταθεί από σταθερά πηνία.



Σχήμα 1.23 Ηλεκτροδυναμική κίνηση οργάνου

Το εξωτερικό τμήμα ενός βαττομέτρου αποτελείται από τους τέσσερις ακροδέκτες και τον μετρητικό μηχανισμό που δείχνει την ποσότητα της ισχύος που καταναλώνεται στο κύκλωμα. Η εξωτερική και εσωτερική εμφάνιση του βαττομέτρου απεικονίζεται στο σχήμα 1.24.

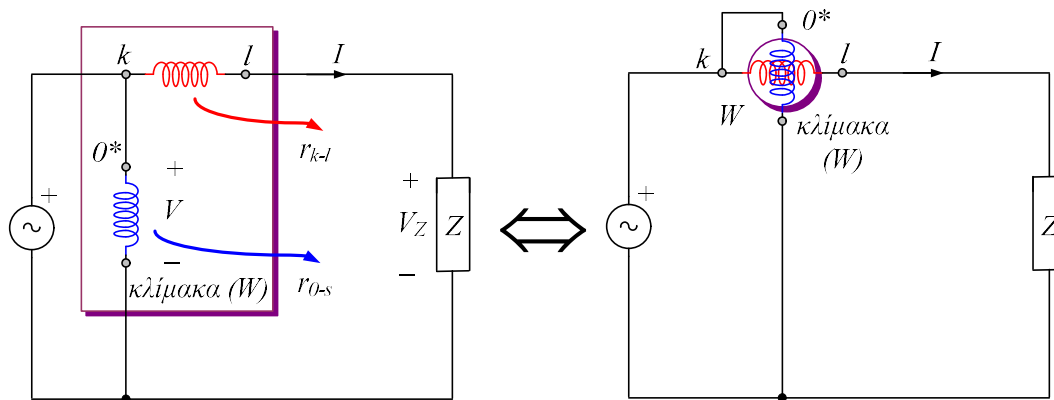


Σχήμα 1.24 Απεικόνιση ενός βαττομέτρου

Εντός του οργάνου υπάρχουν δύο πηνία: το πηνίο ρεύματος (ή αμπερομετρικός κλάδος) και το πηνίο τάσεως (ή βολτομετρικός κλάδος). Σ' αυτό το παράδειγμα, χάριν απλότητας, υποθέτουμε ότι οι σύνθετες αντιστάσεις των πηνίων ρεύματος και τάσεως θεωρείται μηδέν. Στην πράξη, αυτό δεν είναι απαραίτητο αφού το όργανο διαθέτει έναν μηχανισμό διόρθωσης που συμπεριλαμβάνει τις σύνθετες αντιστάσεις των πηνίων.

### 1.3.2.2 Συνδεσμολογία βαττομέτρου σε μονοφασικό κύκλωμα

Ένα βαττόμετρο συνδέεται όπως φαίνεται στο σχήμα 1.25, για να παρέχει τις απαραίτητες μετρήσεις τάσης και ρεύματος. Το πηνίο ρεύματος συνδέεται εν σειρά με το φορτίο και το πηνίο τάσεως συνδέεται εν παραλλήλω. Με αυτόν τον τρόπο το βαττόμετρο "βλέπει" το ρεύμα που διαρρέει το φορτίο και την τάση που επικρατεί στα άκρα του. Θυμηθείτε ότι η ισχύς που καταναλώνεται σε ένα κυκλωματικό στοιχείο, σχετίζεται με τις δύο αυτές ποσότητες. Το βαττόμετρο, επομένως, κατασκευάζεται για να παρέχει την ένδειξη του γινομένου των rms τιμών του ρεύματος και της τάσης φορτίου, η οποία είναι η πραγματική ισχύς που καταναλώνεται στο φορτίο  $P = \text{Re}\{\tilde{S}\} = \text{Re}\{V \cdot I^*\}$ .



Σχήμα 1.25 Συνδεσμολογία βαττομέτρου σε μονοφασικό κύκλωμα

Εάν το κύκλωμα του παραπάνω σχήματος τροφοδοτηθεί με συνεχή τάση και οι εσωτερικές αντιστάσεις του αμπερομετρικού και βολτομετρικού κλάδου είναι  $r_{k-l}$  και  $r_{0-s}$ , αντίστοιχα, τότε:  $V = V_{k-l} + V_Z$ . Η ένδειξη του οργάνου,  $P_w$ , βασίζεται στο γινόμενο του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο ρεύματος και της τάσης που αναπτύσσεται στα άκρα του πηνίου τάσης. Έτσι:  $P_w = V \cdot I \Rightarrow P_w = (V_{k-l} + V_Z) \cdot I \Rightarrow$

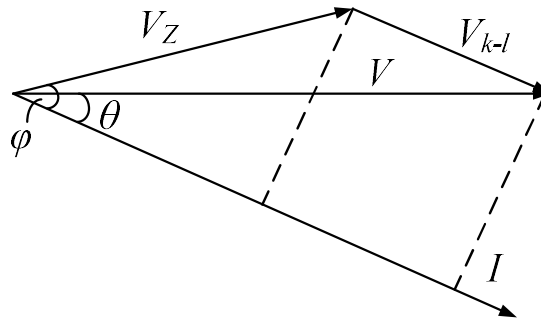
$$P_w = V_{k-l} \cdot I + V_Z \cdot I \Rightarrow P_w = (r_{k-l} \cdot I) \cdot I + V_Z \cdot I \Rightarrow P_w = r_{k-l} \cdot I^2 + V_Z \cdot I \Rightarrow$$

$$P_w = r_{k-l} \cdot I^2 + P_L \quad (36)$$

όπου  $P_L = V_Z \cdot I$  είναι η ισχύς που καταναλώνεται στο φορτίο  $Z$ .

Όταν το ίδιο κύκλωμα τροφοδοτηθεί με εναλλασσόμενη τάση, τότε η τάση στα άκρα του πηνίου τάσης θα είναι το διανυσματικό άθροισμα της τάσης στα άκρα του πηνίου ρεύματος και της τάσης στα άκρα του φορτίου. Εάν ο συντελεστής ισχύος για το φορτίο είναι  $\cos \varphi$ , τότε η ισχύς στο φορτίο θα είναι  $P_L = |V_Z| \cdot |I| \cdot \cos \varphi$ . Ο φασιθέτης τάσης  $V$  στα άκρα του πηνίου τάσης και ο φασιθέτης ρεύματος  $I$  που διαρρέει το πηνίο ρεύματος, παρουσιάζουν διαφορά φάσης  $\theta^\circ$ . Έτσι η ένδειξη του βαττομέτρου

θα είναι:  $P_w = |V| \cdot |I| \cdot \cos \theta$ . Όμως από το διανυσματικό διάγραμμα του σχήματος 1.26 προκύπτει ότι  $|V| \cdot \cos \theta = |V_Z| \cdot \cos \varphi + |V_{k-l}|$ . Επομένως  $P_w = (|V_Z| \cdot \cos \varphi + |V_{k-l}|) \cdot |I|$  και άρα  $P_w = |V_Z| \cdot |I| \cdot \cos \varphi + |V_{k-l}| \cdot |I|$ . Αλλά  $|V_{k-l}| = r_{k-l} \cdot |I|$  και με αντικατάσταση προκύπτει  $P_w = |V_Z| \cdot |I| \cdot \cos \varphi + (r_{k-l} \cdot |I|) \cdot |I| \Rightarrow P_w = |V_Z| \cdot |I| \cdot \cos \varphi + r_{k-l} \cdot |I|^2 \Rightarrow P_w = r_{k-l} \cdot |I|^2 + P_L$ .



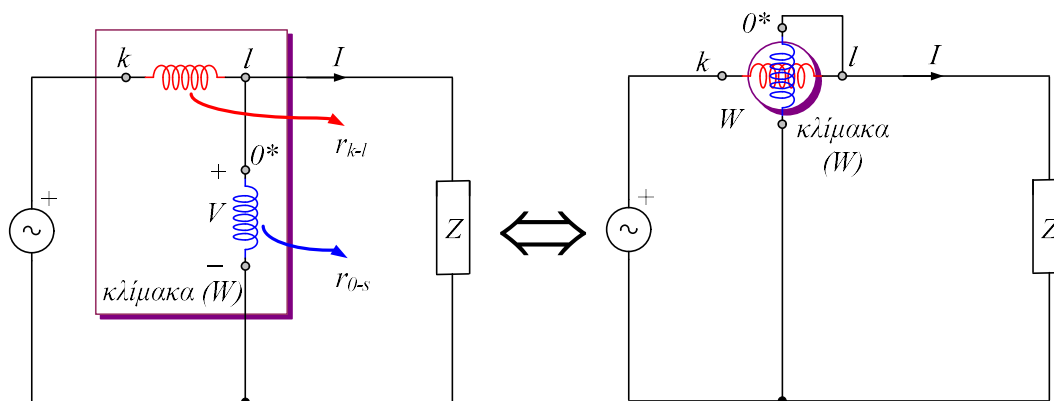
**Σχήμα 1.26** Διανυσματικό διάγραμμα τάσεων ρευμάτων για την διάταξη του σχήματος 1.25

Εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί η συνδεσμολογία του σχήματος 1.27. Εάν το συγκεκριμένο κύκλωμα τροφοδοτηθεί με συνεχή τάση και οι εσωτερικές αντιστάσεις του αμπερομετρικού και βολτομετρικού κλάδου είναι  $r_{k-l}$  και  $r_{0-s}$ , αντίστοιχα, τότε:  $I_{k-l} = I_{0-s} + I$ . Η ένδειξη του οργάνου,  $P_w$ , βασίζεται στο γινόμενο του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο ρεύματος και της τάσης που αναπτύσσεται στα άκρα του πηνίου τάσης. Έτσι:  $P_w = V \cdot I_{k-l} \Rightarrow P_w = V \cdot (I_{0-s} + I) \Rightarrow$

$$P_w = V \cdot I_{0-s} + V \cdot I \Rightarrow P_w = V \cdot \frac{V}{r_{0-s}} + V \cdot I \Rightarrow P_w = \frac{V^2}{r_{0-s}} + V \cdot I \Rightarrow$$

$$P_w = \frac{V^2}{r_{0-s}} + P_L \quad (37)$$

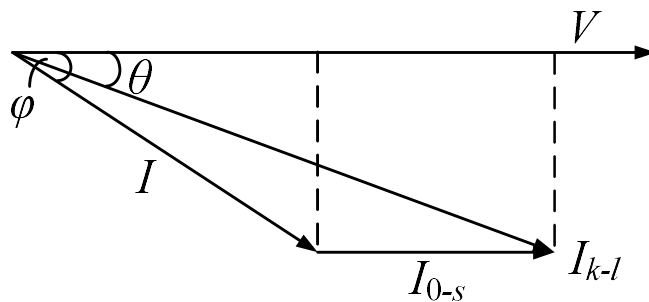
όπου  $P_L = V \cdot I$  είναι η ισχύς που καταναλώνεται στο φορτίο  $Z$ .



**Σχήμα 1.27** Εναλλακτική συνδεσμολογία βαττομέτρου σε μονοφασικό κύκλωμα

Όταν το ίδιο κύκλωμα τροφοδοτηθεί με εναλλασσόμενη τάση, τότε ρεύμα που διαρρέει το πηνίο ρεύματος θα είναι το διανυσματικό άθροισμα του φασιθέτη του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο τάσης και του φασιθέτη του ρεύματος που διαρρέει το φορτίο. Εάν ο συντελεστής ισχύος για το φορτίο είναι  $\cos \varphi$ , τότε η ισχύς στο φορτίο θα είναι  $P_L = |V| \cdot |I| \cdot \cos \varphi$ . Ο φασιθέτης τάσης  $V$  στα άκρα του πηνίου τάσης και ο φασιθέτης ρεύματος  $I_{k-l}$  που διαρρέει το πηνίο ρεύματος, παρουσιάζουν διαφορά φάσης  $\theta^\circ$ . Έτσι η ένδειξη του βαττομέτρου θα είναι:  $P_w = |V| \cdot |I_{k-l}| \cdot \cos \theta$ . Όμως από το διανυσματικό διάγραμμα του σχήματος 1.28 προκύπτει ότι  $|I_{k-l}| \cdot \cos \theta = |I| \cdot \cos \varphi + |I_{0-s}|$ . Επομένως  $P_w = (|I| \cdot \cos \varphi + |I_{0-s}|) \cdot |V|$  και άρα  $P_w = |V| \cdot |I| \cdot \cos \varphi + |V| \cdot |I_{0-s}|$ . Αλλά  $|I_{0-s}| = \frac{|V|}{r_{0-s}}$  και με αντικατάσταση προκύπτει

$$P_w = |V| \cdot |I| \cdot \cos \varphi + \left( \frac{|V|}{r_{0-s}} \right) \cdot |V| \Rightarrow P_w = |V| \cdot |I| \cdot \cos \varphi + \frac{|V|^2}{r_{0-s}} \Rightarrow P_w = \frac{|V|^2}{r_{0-s}} + P_L.$$

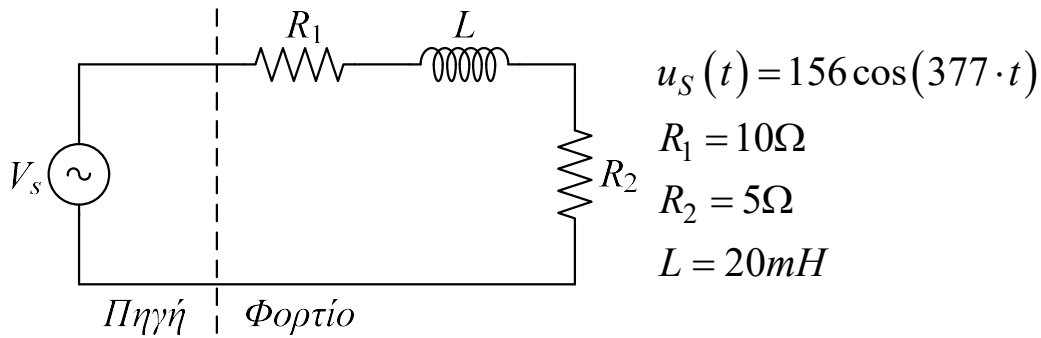


Σχήμα 1.28 Διανυσματικό διάγραμμα τάσεων ρευμάτων για την διάταξη του σχήματος 1.27



*Η ένδειξη του βαττομέτρου για κάθε δυνατή συνδεσμολογία του βαττομέτρου δίνεται από τον ίδια σχέση, ανεξάρτητα από το εάν η πηγή είναι συνεχούς ή εναλλασσομένου.*

**Πρόβλημα 1.18.** Για το κύκλωμα του σχήματος 1.29, (α) να δειχθεί η συνδεσμολογία του βαττομέτρου και να υπολογιστεί η ισχύς που καταναλώνεται στο φορτίο και (β) να δειχθεί η συνδεσμολογία του βαττομέτρου για να μετρηθεί η ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση  $R_2$  και να βρεθεί η ένδειξη αυτή.



Σχήμα 1.29 Κυκλωματική διάταξη για το πρόβλημα 1.18

(α)

Για να μετρήσουμε την ισχύ που καταναλώνεται στο φορτίο, πρέπει να γνωρίζουμε το ρεύμα που διαρρέει το φορτίο και την τάση στα άκρα του. Αυτό σημαίνει ότι το βατόμετρο πρέπει να συνδεσμοποιηθεί όπως φαίνεται στο σχήμα 1.30. Το βατόμετρο θα διαβάσει  $P = \text{Re}\{V_S \cdot I^*\}$ . Όμως  $V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{156}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_{rms} = 110,31V$ .

Έτσι  $V_S = 110,31 \angle 0^\circ V$ . Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι:

$$Z = R_1 + R_2 + j \cdot \omega \cdot L \Rightarrow Z = 10 + 5 + j \cdot 377 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \Rightarrow Z = (15 + j \cdot 7,54) \Omega \Rightarrow$$

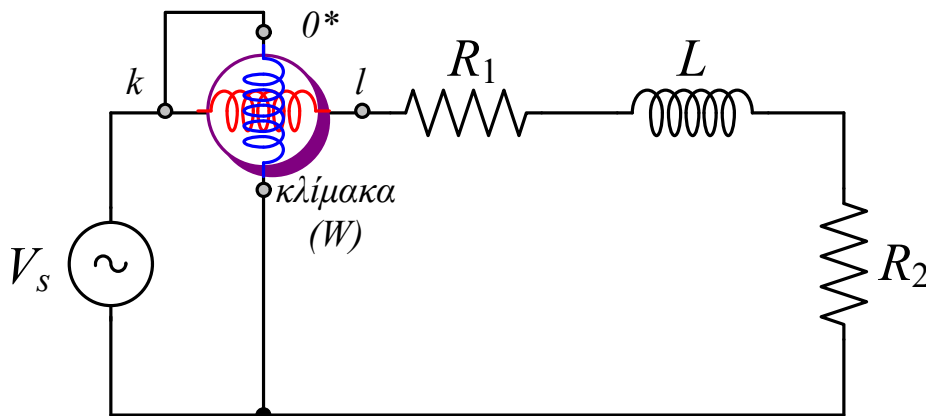
$Z = 16,79 \angle 26,69^\circ \Omega$ . Αλλά το ρεύμα του κυκλώματος είναι

$$I = \frac{V_S}{Z} = \frac{110,31 \angle 0^\circ}{16,79 \angle 26,69^\circ} \Rightarrow I = 6,57 \angle -26,69^\circ A$$

Επομένως,

$$P = \text{Re}\{V_S \cdot I^*\} = \text{Re}\{110,31 \angle 0^\circ \cdot 6,57 \angle 26,69^\circ\} = \text{Re}\{724,73 \angle 26,69^\circ VA\} \Rightarrow$$

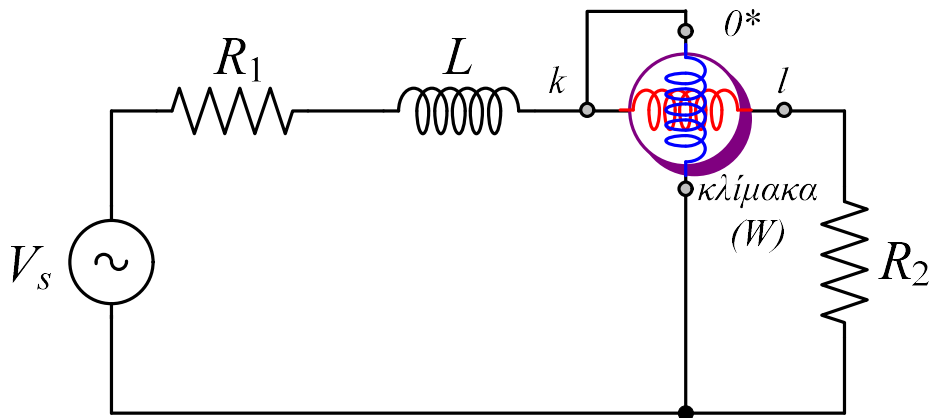
$$P = \text{Re}\{647,51 + j \cdot 325,52\} \Rightarrow P = 647,51 W.$$



Σχήμα 1.30 Προτεινόμενη συνδεσμολογία για το πρόβλημα 1.18 (α)

(β)

Για να μετρηθεί η ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση  $R_2$ , πρέπει να μετρηθεί η τάση στα άκρα της αντίστασης  $R_2$  και το ρεύμα που την διαρρέει. Η συνδεσμολογία φαίνεται στο σχήμα 1.31. Η ένδειξη του οργάνου θα είναι:  $P = |I|^2 \cdot R_2 \Rightarrow P = |I|^2 \cdot R_2 = 6,57^2 \cdot 5 \Rightarrow P = 215,82 W$ .



Σχήμα 1.31 Προτεινόμενη συνδεσμολογία για το πρόβλημα 1.18 (β)

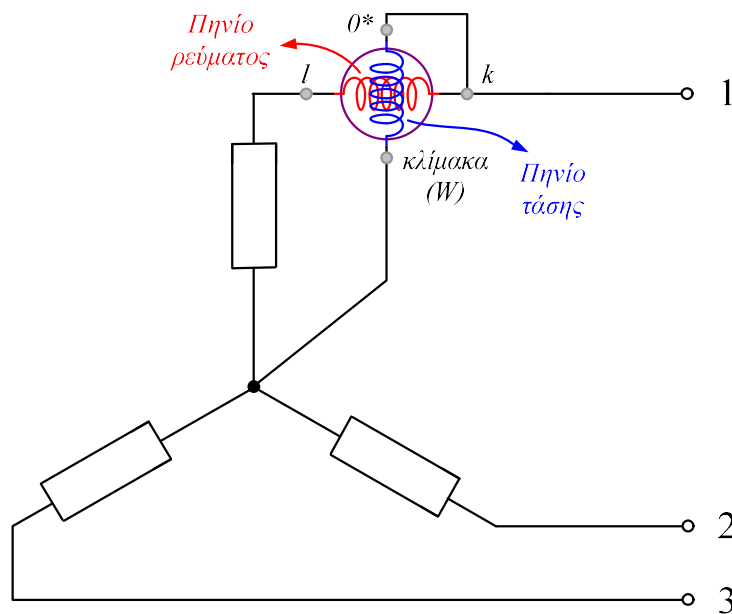
### 1.3.2.3 Συνδεσμολογία βαττομέτρου σε τριφασικό κύκλωμα

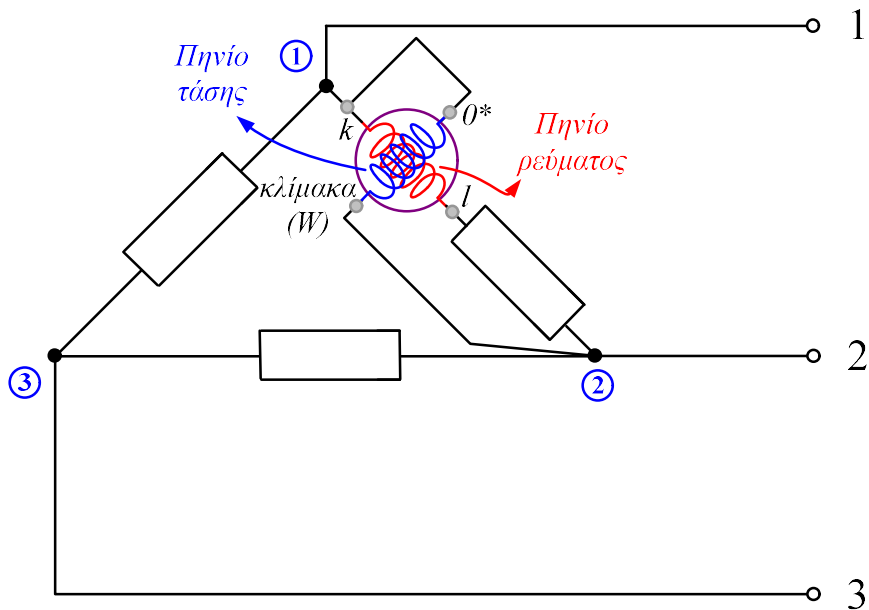
Η ισχύς σε τριφασικά φορτία μπορεί να μετρηθεί με τις ακόλουθες μεθόδους.

#### 1.3.2.3.1 Μέθοδος μέτρησης πραγματικής ισχύος με ένα βαττόμετρο για ισορροπημένο φορτίο

Οι δυνατές συνδέσεις ενός βαττομέτρου για τις δύο συνδεσμολογίες αστέρα και τριγώνου φαίνονται στο σχήμα 1.32. Η συνολική ισχύς βρίσκεται τριπλασιάζοντας την ένδειξη του βαττομέτρου, δηλαδή :

$$\text{Συνολική Ισχύς} = 3 \times \text{ένδειξη βαττομέτρου} = 3 \cdot P_1$$



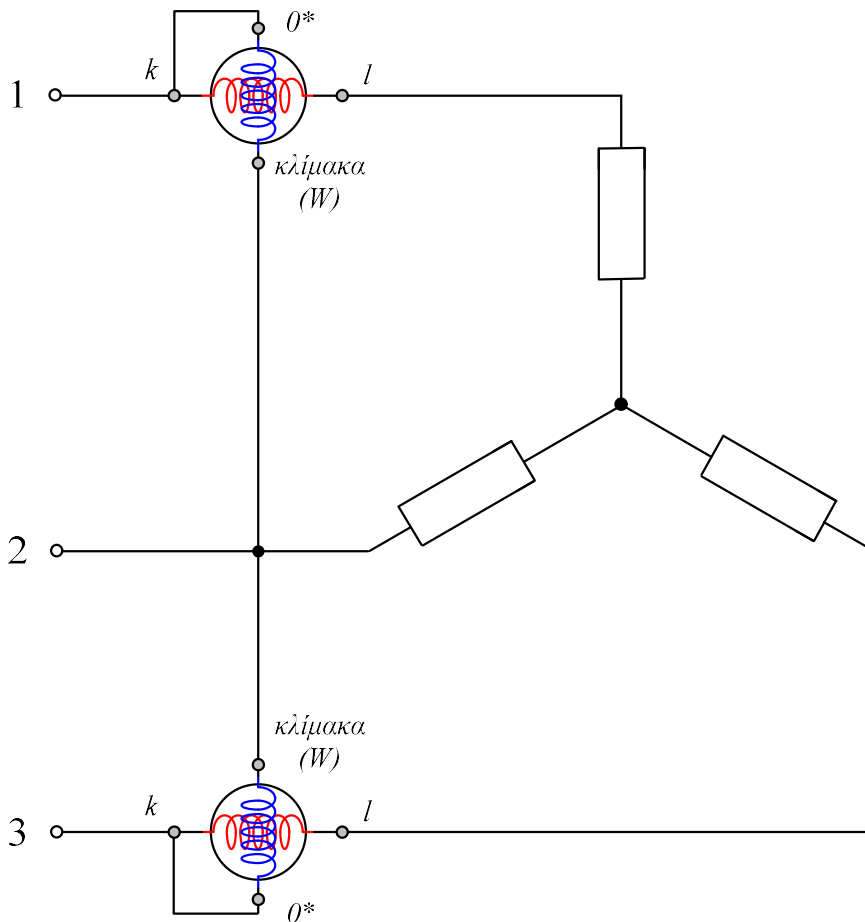


**Σχήμα 1.32 Μέτρηση πραγματικής ισχύος σε τριφασικό κύκλωμα με ένα βαττόμετρο και ισοροπημένο φορτίο**

**1.3.2.3.2 Μέθοδος μέτρησης πραγματικής ισχύος με δύο βαττόμετρα ισοροπημένα ή μη ισοροπημένα φορτία**

Το κυκλωματικό διάγραμμα για αυτή την μέθοδο φαίνεται στο σχήμα 1.33, θεωρώντας ένα φορτίο συνδεσμολογημένο σε αστέρα. Η ίδια διάταξη χρησιμοποιείται και για την περίπτωση φορτίου συνδεσμολογημένου σε τρίγωνο. Η διάταξη αυτή είναι γνωστή και ως σύνδεση βαττομέτρων κατά ARON (Πρόβλημα 1.19).

**Συνολική Ισχύς = άθροισμα ενδείξεων βαττομέτρων =  $P_1 + P_2$**



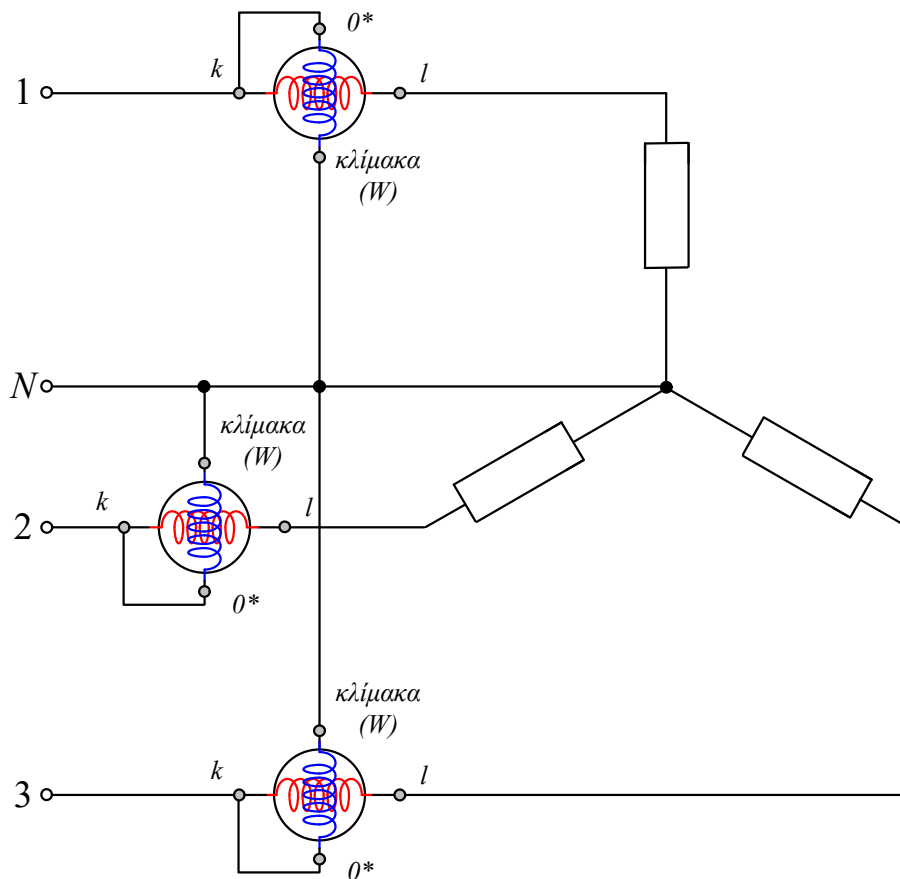
**Σχήμα 1.33 Διάταξη μέτρησης πραγματικής ισχύος σε τριφασικό κύκλωμα με δύο βαττόμετρα**

### **1.3.2.3.3 Μέθοδος μέτρησης πραγματικής ισχύος με τρία βαττόμετρα για ένα τριφασικό σύστημα 4 αγωγών με φορτία ισορροπημένα ή μη ισορροπημένα**

Το κυκλωματικό διάγραμμα για αυτή την μέθοδο φαίνεται στο σχήμα 1.34, θεωρώντας ένα φορτίο συνδεσμοποιημένο σε αστέρα. Η ίδια διάταξη χρησιμοποιείται και για την περίπτωση φορτίου συνδεσμοποιημένου σε τρίγωνο.

**Συνολική Ισχύς = άθροισμα ενδείξεων βαττομέτρων =  $P_1 + P_2 + P_3$**

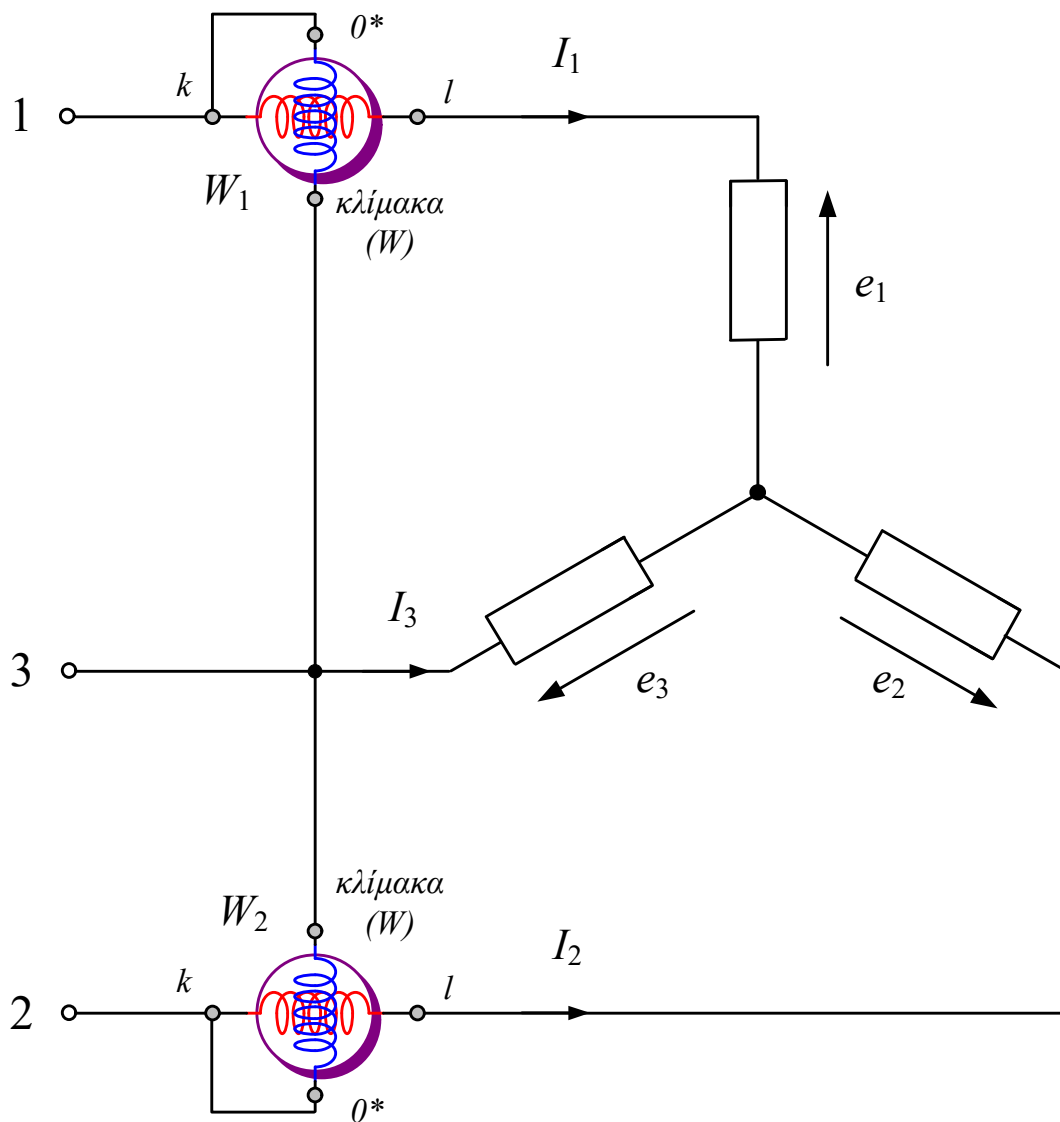




Σχήμα 1.34 Μέτρηση ισχύος σε τριφασικό κύκλωμα με 4 αγωγούς

**Πρόβλημα 1.19.** (α) Δείξτε ότι η συνολική ισχύς σε ένα τριφασικό σύστημα τριών αγωγών, χρησιμοποιώντας την μέθοδο μέτρησης με δύο βαττόμετρα, δίνεται από το άθροισμα των ενδείξεων τους. Σχεδιάστε το αντίστοιχο κυκλωματικό διάγραμμα. (β) Σχεδιάστε το διανυσματικό διάγραμμα για την μέθοδο μέτρησης με δύο βαττόμετρα, θεωρώντας ένα ισορροπημένο φορτίο.

(α) Η κυκλωματική διάταξη για την μέτρηση της ισχύος με χρήση δύο βαττομέτρων και θεωρώντας ένα φορτίο συνδεσμοποιημένο σε αστέρα, φαίνεται στο σχήμα 1.35. Τα ρεύματα που διαρρέουν τους αμπερομετρικούς κλάδους των δύο βαττομέτρων είναι  $I_1$  και  $I_2$ , αντίστοιχα. Ο βολτομετρικός κλάδος του πρώτου βαττομέτρου βρίσκεται υπό την πολική τάση  $V_{1-3}$ , ενώ ο βολτομετρικός κλάδος του δεύτερου βαττομέτρου βρίσκεται υπό την πολική τάση  $V_{2-3}$ .



Σχήμα 1.35 Μετρητική διάταξη ARON

Η συνολική στιγμιαία ισχύς, δίνεται από την σχέση  $p = e_1 \cdot i_1 + e_2 \cdot i_2 + e_3 \cdot i_3$ , ενώ σε κάθε τριφασικό σύστημα  $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ . Επομένως  $i_3 = -i_1 - i_2$  και με αντικατάσταση προκύπτει:

$$p = e_1 \cdot i_1 + e_2 \cdot i_2 + e_3 \cdot (-i_1 - i_2) = (e_1 - e_3) \cdot i_1 + (e_2 - e_3) \cdot i_2.$$

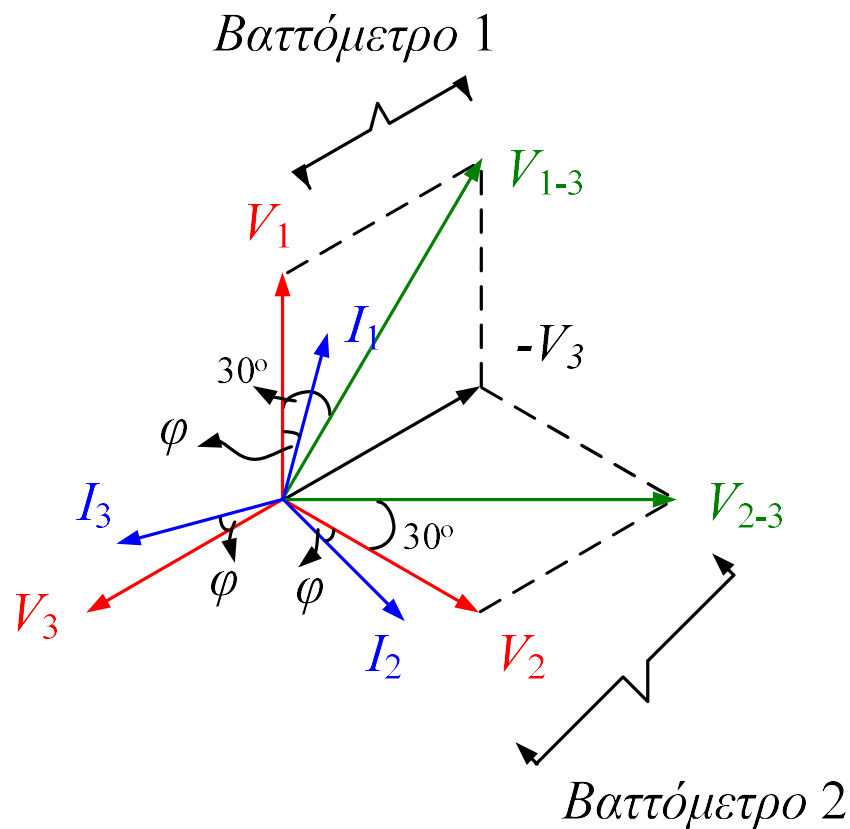
Όμως, στο σχήμα 1.35,  $(e_1 - e_3)$  και  $(e_2 - e_3)$  είναι οι πτώσεις τάσεις στα άκρα των βαττομέτρων  $W_1$  και  $W_2$ , αντίστοιχα. Επομένως η συνολική στιγμιαία ισχύς θα είναι:

$$p = (\text{ένδειξη βαττομέτρου 1}) + (\text{ένδειξη βαττομέτρου 2}) = p_1 + p_2.$$

Οι μηχανισμοί κίνησης των βαττομέτρων δεν μπορούν να ακολουθήσουν τις μεταβολές οι οποίες λαμβάνουν χώρα σε φυσιολογικές συχνότητες και τελικά δείχνουν την μέση τιμή της ισχύος σε έναν πλήρη κύκλο (μία περίοδο). Έτσι η συνολική ισχύς για ισορροπημένα ή μη ισορροπημένα φορτία θα είναι:

$$P = P_1 + P_2.$$

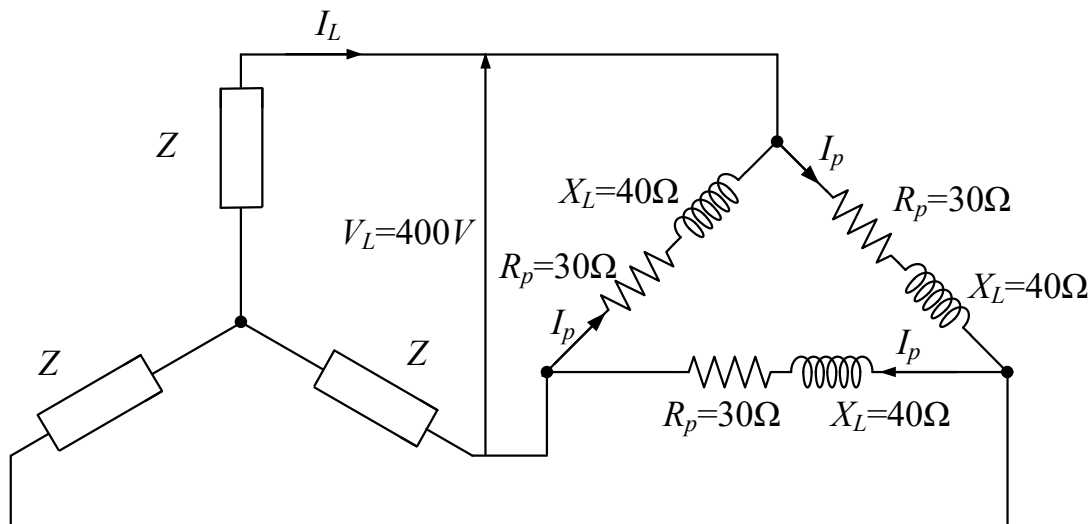
(β) Το διανυσματικό διάγραμμα για την μέθοδο μέτρησης με δύο βατόμετρα και για ισορροπημένο φορτίο που έχει ρεύμα μεταφοράς φαίνεται στο σχήμα 1.36, όπου  $V_{1-3} = V_1 - V_3$  και  $V_{2-3} = V_2 - V_3$  (διανυσματικά).



Σχήμα 1.36 Διανυσματικό διάγραμμα τάσεων ρευμάτων για το πρόβλημα 1.19

**Πρόβλημα 1.20.** Ένας τριφασικός, 400V και συνδεσμολογημένος σε αστέρα εναλλάκτης, τροφοδοτεί ένα φορτίο σε συνδεσμολογία τριγώνου το οποίο σε κάθε φάση έχει αντίσταση  $30\Omega$  και επαγωγική αντίσταση  $40\Omega$ . Να υπολογιστούν (α) το ρεύμα που παρέχει ο εναλλάκτης και (β) η ισχύς εξόδου και τα kVA του εναλλάκτη, θεωρώντας μηδενικές απώλειες στην γραμμή μεταξύ εναλλάκτη και φορτίου.

Ένα κυκλωματικό διάγραμμα του εναλλάκτη και του φορτίου παρουσιάζεται στο σχήμα 1.37.



Σχήμα 1.37 Κυκλωματική διάταξη για το πρόβλημα 1.20

(α) Στο φορτίο το φασικό ρεύμα είναι  $I_p = \frac{V_p}{Z_p}$  και η φασική τάση  $V_p = V_L$ .

Επομένως,  $V_p = 400V$ .

Η ανά φάση σύνθετη αντίσταση υπολογίζεται ως:

$$Z_p = \sqrt{R_p^2 + X_L^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} \Rightarrow Z_p = 50\Omega.$$

$$\text{Έτσι: } I_p = \frac{V_p}{Z_p} = \frac{400V}{50\Omega} \Rightarrow I_p = 8A.$$

Για την συνδεσμολογία τριγώνου, το ρεύμα γραμμής είναι:

$$I_L = \sqrt{3} \cdot I_p = \sqrt{3} \cdot 8 \Rightarrow I_L = 13,86A. \text{ Δηλαδή το ρεύμα που παρέχει ο εναλλάκτης είναι } 13,86A.$$

(β) Η ισχύς εξόδου του εναλλάκτη ισούται με την ισχύ που καταναλώνεται στο φορτίο. Αυτό σημαίνει ότι:

$$P = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos \varphi, \text{ όπου } \cos \varphi = \frac{R_p}{Z_p} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{30}{50} \Rightarrow \cos \varphi = 0,6$$

$$\text{Με αντικατάσταση έχουμε: } P = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 13,86 \cdot 0,6 \Rightarrow P = 5,76kW.$$

Η έξοδος του εναλλάκτη σε kVA είναι:

$$S = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \Rightarrow S = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 13,86 \Rightarrow S = 9,60kVA.$$

**Πρόβλημα 1.21.** Κάθε φάση ενός φορτίου συνδεσμολογημένου σε τρίγωνο, αποτελείται από μία ωμική αντίσταση  $30\Omega$  εν σειρά με έναν πυκνωτή  $80\mu F$ . Το φορτίο συνδέεται σε μια τριφασική παροχή  $400V, 50Hz$ . Να υπολογιστούν (α) το φασικό ρεύμα, (β) το ρεύμα γραμμής, (γ) η συνολική ισχύς που καταναλώνεται και (δ) τα kVA του φορτίου. Σχεδιάστε το συνολικό διανυσματικό διάγραμμα για το φορτίο.

(α) Η χωρητική αντίσταση θα είναι:

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \Rightarrow X_C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} \Rightarrow X_C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 80 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow X_C = 39,79\Omega$$

Η ανά φάση σύνθετη αντίσταση υπολογίζεται ως:

$$Z_p = \sqrt{R_p^2 + X_C^2} = \sqrt{30^2 + 39,79^2} \Rightarrow Z_p = 49,83\Omega$$

Επομένως ο συντελεστής ισχύος υπολογίζεται από την σχέση:

$$\cos \varphi = \frac{R_p}{Z_p} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{30}{49,83} \Rightarrow \cos \varphi = 0,602$$

Άρα  $\varphi = \arccos(0,602) \Rightarrow \varphi = 52,59^\circ$  προπορείας .

Στην συνδεσμολογία τριγώνου, το φασικό ρεύμα είναι  $I_p = \frac{V_p}{Z_p}$  και η φασική τάση

$$V_p = V_L.$$

$$\text{Έτσι } I_p = \frac{V_p}{Z_p} = \frac{400V}{49,83\Omega} \Rightarrow I_p = 8,027A.$$

(β) Το ρεύμα γραμμής θα είναι  $I_L = \sqrt{3} \cdot I_p \Rightarrow I_L = \sqrt{3} \cdot 8,027 \Rightarrow I_L = 13,90A$ .

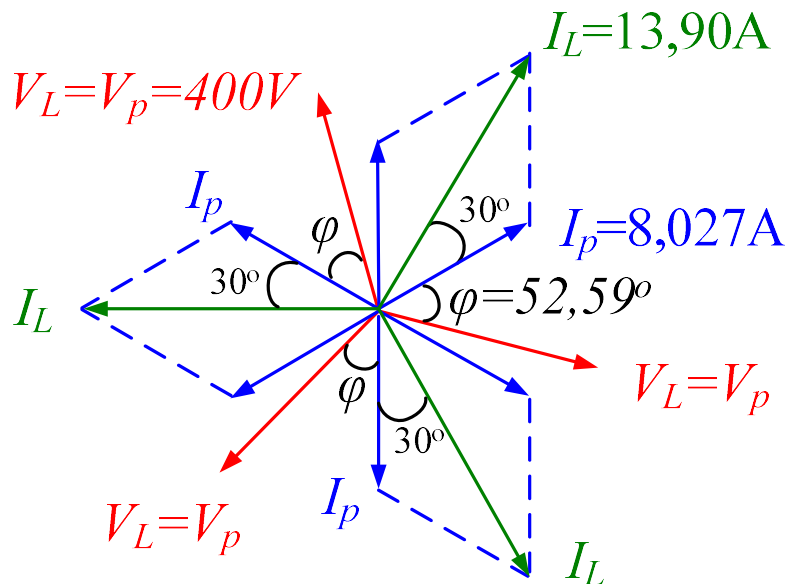
(γ) Η συνολική ισχύς που καταναλώνεται είναι:

$$P = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \cdot \cos \varphi \Rightarrow P = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 13,90 \cdot 0,602 \Rightarrow P = 5,797kW$$

(δ) Τα συνολικά ζητούμενα  $kVA$ , θα είναι:

$$S = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I_L \Rightarrow S = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 13,90 \Rightarrow S = 9,630kVA.$$

Το διανυσματικό διάγραμμα για το φορτίο φαίνεται στο σχήμα 1.38.



Σχήμα 1.38 Διανυσματικό διάγραμμα τάσεων-ρευμάτων για το πρόβλημα 1.21

**Πρόβλημα 1.22.** Τρία πανομοιότυπα πηνία, που το καθένα έχει ωμική αντίσταση  $8\Omega$  και επαγωγική αντίσταση  $8\Omega$  συνδέονται (α) σε αστέρα και (β) σε τρίγωνο, ενώ τροφοδοτούνται μέσω μίας τριφασικής παροχής  $415V$ . Εάν για την μέτρηση της ολικής πραγματικής ισχύος χρησιμοποιείται η μέθοδος των δύο βαττομέτρων και η ένδειξη του δεύτερου βαττομέτρου είναι  $0,766kW$  σε αστέρα και  $2,310kW$  σε τρίγωνο, να υπολογιστεί η ένδειξη του πρώτου βαττομέτρου.

(α) **Συνδεσμολογία αστέρα:**  $V_L = \sqrt{3} \cdot V_p$  και  $I_L = I_p$ .

Η φασική τάση θα είναι  $V_p = \frac{V_L}{\sqrt{3}} = \frac{415}{\sqrt{3}}$  και η σύνθετη αντίσταση

$$Z_p = \sqrt{R_p^2 + X_L^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} \Rightarrow Z_p = 11,31\Omega.$$

Έτσι το φασικό ρεύμα θα είναι  $I_p = \frac{V_p}{Z_p} = \frac{415/\sqrt{3}}{11,31} = 21,18A$ .

Η συνολική ισχύς θα ισούται με  $P = 3 \cdot I_p^2 \cdot R_p = 3 \cdot 21,18^2 \cdot 8 \Rightarrow P = 10766W$ .

Εάν οι ενδείξεις των δύο βαττομέτρων είναι  $P_1$  και  $P_2$ , αντίστοιχα, τότε  $P_1 + P_2 = 10766W$ .

Αφού  $P_2 = 0,766kW = 766W$ , η ένδειξη του πρώτου βαττομέτρου θα είναι:  $P_1 = 10766 - P_2 \Rightarrow P_1 = 10766 - 766 \Rightarrow P_1 = 10000W = 10kW$ .

(β) **Συνδεσμολογία τριγώνου:**  $V_L = V_p$  και  $I_L = \sqrt{3} \cdot I_p$ .

Το φασικό ρεύμα θα είναι  $I_p = \frac{V_p}{Z_p} = \frac{415}{11,31} = 36,69A$ .

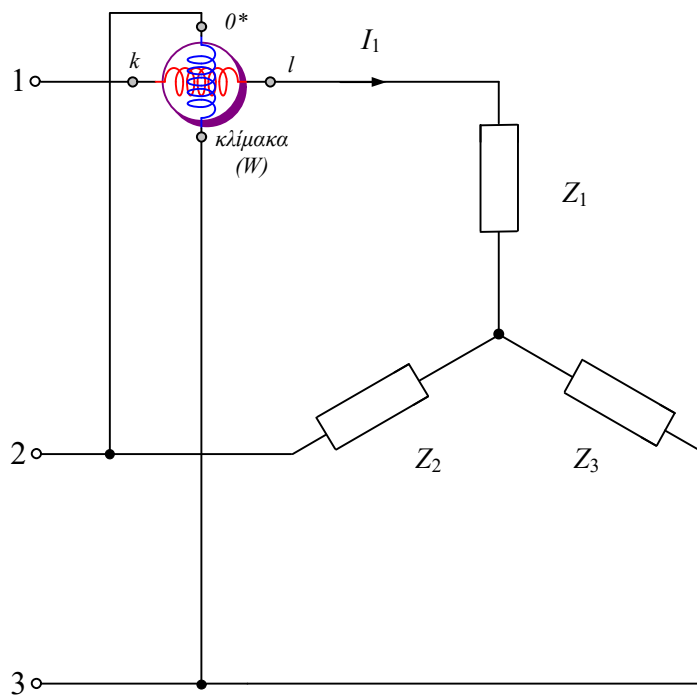
Η συνολική ισχύς θα ισούται με  $P = 3 \cdot I_p^2 \cdot R_p = 3 \cdot 36,69^2 \cdot 8 \Rightarrow P = 32310W$ .

Εάν οι ενδείξεις των δύο βαττομέτρων είναι  $P_1$  και  $P_2$ , αντίστοιχα, τότε  $P_1 + P_2 = 32310W$ .

Αφού  $P_2 = 2,310kW = 2310W$ , η ένδειξη του πρώτου βαττομέτρου θα είναι:  $P_1 = 32310 - P_2 \Rightarrow P_1 = 32310 - 2310 \Rightarrow P_1 = 30000W = 30kW$ .

### 1.3.2.3.5 Μέθοδος μέτρησης αέργου ισχύος με ένα βαττόμετρο για σύστημα με τρεις αγωγούς

Για τον σκοπό αυτό, ο αμπερομετρικός κλάδος του βαττομέτρου συνδέεται σε μία φάση, ενώ ο βολτομετρικός στις υπόλοιπες δύο. Βάσει του σχήματος 1.39, το ρεύμα που διαρρέει τον αμπερομετρικό κλάδο είναι  $I_1$  και η τάση στα άκρα του βολτομετρικού κλάδου  $V_{2-3}$ .



**Σχήμα 1.39 Μέτρηση αέργου ισχύος με ένα βαττόμετρο**

Από το διανυσματικό διάγραμμα του σχήματος 1.36 είναι προφανές ότι η διαφορά φάση μεταξύ των δύο αυτών διανυσματικών μεγεθών είναι  $(90^\circ - \varphi)$ . Έτσι η ένδειξη του βαττομέτρου θα είναι:  $V_{2-3} \cdot I_1 \cdot \cos(90^\circ - \varphi)$  ή  $V_{2-3} \cdot I_1 \cdot \sin \varphi$ .

Για ένα ισορροπημένο φορτίο, η τάση είναι  $V_{2-3} = V_L$  και το ρεύμα  $I_1 = I_L$ . Επομένως, η ένδειξη του βαττομέτρου είναι  $V_L \cdot I_L \cdot \sin \varphi$  και η συνολική άεργος ισχύς υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας την ένδειξη του βαττομέτρου με  $\sqrt{3}$ .

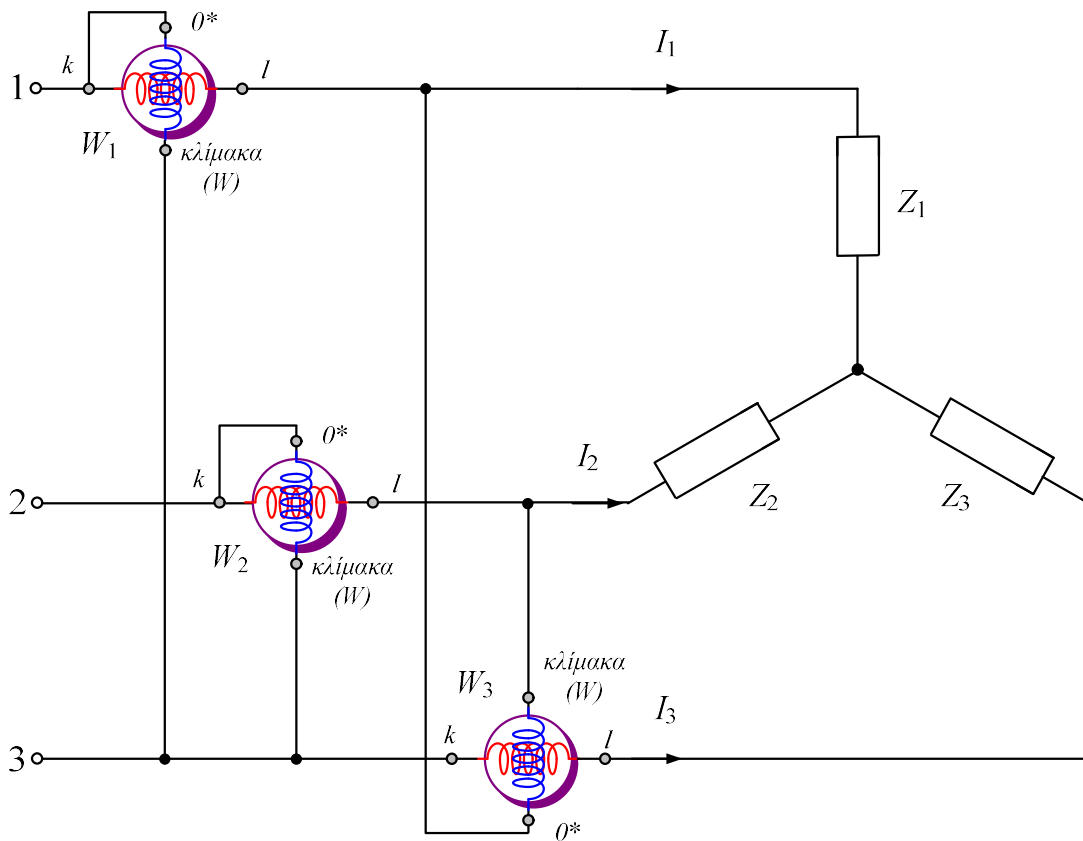
### 1.3.2.3.6 Μέθοδος μέτρησης αέργου ισχύος με τρία βαττόμετρα για σύστημα με τρεις αγωγούς και μη ισορροπημένα φορτία

Το κυκλωματικό διάγραμμα για αυτή την μέθοδο φαίνεται στο σχήμα 1.40, θεωρώντας ένα φορτίο συνδεσμοποιημένο σε αστέρα. Η ίδια διάταξη χρησιμοποιείται και για την περίπτωση φορτίου συνδεσμοποιημένου σε τρίγωνο. Εάν το διανυσματικό διάγραμμα τάσεων και ρευμάτων είναι όπως αυτό του σχήματος 1.41 και θεωρώντας ότι οι ενδείξεις των τριών βαττομέτρων είναι  $P_1$ ,  $P_2$  και  $P_3$ , θα ισχύει:

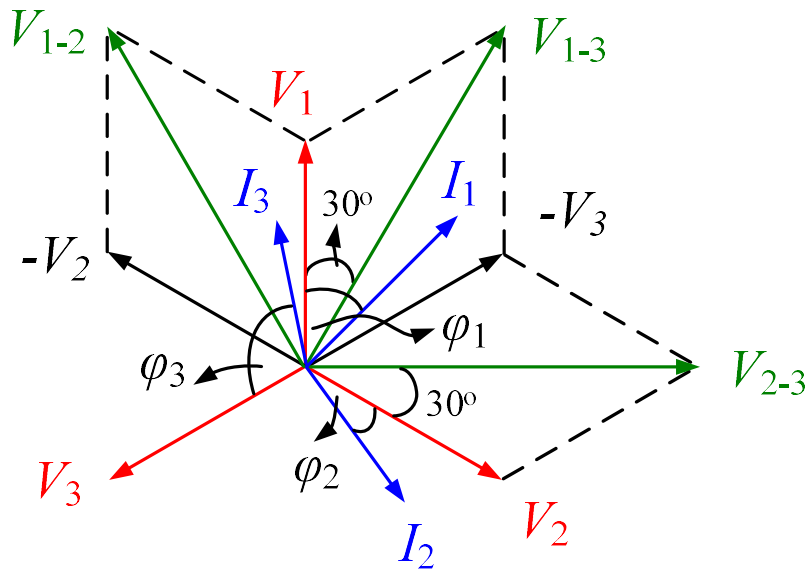
$$P_1 = V_{1-3} \cdot I_1 \cdot \cos(\varphi_1 - 30^\circ) \quad (38)$$

$$P_2 = V_{2-3} \cdot I_2 \cdot \cos(\varphi_2 + 30^\circ) \quad (39)$$

$$P_3 = V_{1-2} \cdot I_3 \cdot \cos(\varphi_3 - 90^\circ) \quad (40)$$



Σχήμα 1.40 Μέτρηση αέργου ισχύος με τρία βαττόμετρα



Σχήμα 1.41 Διανυσματικό διάγραμμα τάσεων-ρευμάτων κατά την μέτρηση αέργου ισχύος με τρία βαττόμετρα

Το άθροισμα των ενδείξεων των βαττομέτρων  $W_1$  και  $W_3$  είναι:

$$P_1 + P_3 = V_{1-3} \cdot I_1 \cdot \cos(\varphi_1 - 30^\circ) + V_{1-2} \cdot I_3 \cdot \cos(\varphi_3 - 90^\circ) \quad (41)$$



Από την τριγωνομετρία είναι γνωστό ότι:

$$\begin{aligned}\cos(\varphi_1 - 30^\circ) &= \cos[(\varphi_1 + 30^\circ) - 60^\circ] = \cos(\varphi_1 + 30^\circ) \cdot \cos 60^\circ + \sin(\varphi_1 + 30^\circ) \cdot \sin 60^\circ \Rightarrow \\ \cos(\varphi_1 - 30^\circ) &= \frac{1}{2} \cdot \cos(\varphi_1 + 30^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin(\varphi_1 + 30^\circ)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\cos(\varphi_3 - 90^\circ) &= \cos[(\varphi_3 - 30^\circ) - 60^\circ] = \cos(\varphi_3 - 30^\circ) \cdot \cos 60^\circ + \sin(\varphi_3 - 30^\circ) \cdot \sin 60^\circ \Rightarrow \\ \cos(\varphi_3 - 90^\circ) &= \frac{1}{2} \cdot \cos(\varphi_3 - 30^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin(\varphi_3 - 30^\circ).\end{aligned}$$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση (41) προκύπτει:

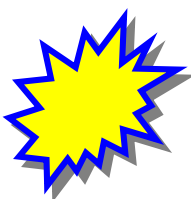
$$\begin{aligned}P_1 + P_3 &= V_{1-3} \cdot I_1 \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \cos(\varphi_1 + 30^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin(\varphi_1 + 30^\circ) \right\} + \\ &\quad + V_{1-2} \cdot I_3 \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \cos(\varphi_3 - 30^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin(\varphi_3 - 30^\circ) \right\} \Rightarrow \\ P_1 + P_3 &= \frac{1}{2} \cdot V_{1-3} \cdot I_1 \cdot \cos(\varphi_1 + 30^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot V_{1-3} \cdot I_1 \cdot \sin(\varphi_1 + 30^\circ) + \frac{1}{2} \cdot V_{1-2} \cdot I_3 \cdot \cos(\varphi_3 - 30^\circ) + \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot V_{1-2} \cdot I_3 \cdot \sin(\varphi_3 - 30^\circ) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_1 + P_3 &= \frac{1}{2} \cdot \{V_{1-3} \cdot I_1 \cdot \cos(\varphi_1 + 30^\circ) + V_{1-2} \cdot I_3 \cdot \cos(\varphi_3 - 30^\circ)\} + \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \{V_{1-3} \cdot I_1 \cdot \sin(\varphi_1 + 30^\circ) + V_{1-2} \cdot I_3 \cdot \sin(\varphi_3 - 30^\circ)\}.\end{aligned}$$

Ο όρος  $\{V_{1-3} \cdot I_1 \cdot \cos(\varphi_1 + 30^\circ) + V_{1-2} \cdot I_3 \cdot \cos(\varphi_3 - 30^\circ)\}$  εκφράζει το άθροισμα των ενδείξεων των βαττομέτρων  $W_1$  και  $W_2$ , δηλαδή  $\{V_{1-3} \cdot I_1 \cdot \cos(\varphi_1 + 30^\circ) + V_{1-2} \cdot I_3 \cdot \cos(\varphi_3 - 30^\circ)\} = \{P_1 + P_2\}$ . Ο δεύτερος όρος του αθροίσματος εκφράζει την συνολική άεργο ισχύ  $Q$ . Έτσι:

$$P_1 + P_3 = \frac{1}{2} \cdot \{P_1 + P_2\} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot Q \Rightarrow 2 \cdot P_1 + 2 \cdot P_3 = P_1 + P_2 + \sqrt{3} \cdot Q \Rightarrow P_1 - P_2 + 2 \cdot P_3 = \sqrt{3} \cdot Q \Rightarrow$$

$$Q = \frac{P_1 - P_2 + 2 \cdot P_3}{\sqrt{3}} \quad (42)$$



**Εάν η συνολική άεργος ισχύς είναι αρνητική το φορτίο είναι χωρητικό, ενώ εάν η συνολική άεργος ισχύς είναι θετική το φορτίο είναι επαγωγικό.**



Τα βαττόμετρα  $W_1$  και  $W_2$  του σχήματος 1.40 είναι συνδεδεσολογημένα κατά **ARON**.



Η ένδειξη του τρίτου βαττομέτρου είναι  $P_3 = V_{1-2} \cdot I_3 \cdot \cos(\varphi_3 - 90^\circ)$  ή  $P_3 = V_{1-2} \cdot I_3 \cdot \sin \varphi_3$ . Εάν το φορτίο είναι ισορροπημένο, τότε η συνολική άεργος ισχύς θα είναι  $Q = \sqrt{3} \cdot P_3 \Rightarrow P_3 = Q / \sqrt{3}$ . Με αντικατάσταση στην εξίσωση (42), προκύπτει  $Q = \sqrt{3} \cdot (P_1 - P_2)$ . Επομένως με την συνδεδεσολογία **ARON**, για ισορροπημένο φορτίο, μπορεί να μετρηθεί και η συνολική άεργος ισχύς.

**Πρόβλημα 1.26.** Δύο βαττόμετρα συνδεδεσολογημένα κατά **ARON**, μετρούν την πραγματική ισχύ εισόδου ενός τριφασικού ισορροπημένου φορτίου. Εάν η ισχύς αυτή είναι  $10kW$  και η ένδειξη του δεύτερου βαττομέτρου  $4kW$ , να υπολογιστούν (α) η ισχύς του πρώτου βαττομέτρου και (β) η συνολική άεργος ισχύς.

(α) Η ένδειξη του πρώτου βαττομέτρου θα είναι:

$$P = P_1 + P_2 \Rightarrow P_1 = P - P_2 \Rightarrow P_1 = 10 - 4 \Rightarrow P_1 = 6kW$$

(β)  $Q = \sqrt{3} \cdot (P_1 - P_2) \Rightarrow Q = \sqrt{3} \cdot (6 - 4) \Rightarrow Q = \sqrt{3} \cdot 2 \Rightarrow Q = 3,46kVAr$

**Πρόβλημα 1.27.** Τρία βαττόμετρα συνδέονται για να μετρήσουν την συνολική πραγματική και άεργο ισχύ σε ένα τριφασικό μη ισορροπημένο τριφασικό φορτίο. Η ένδειξη του τρίτου βαττομέτρου  $4 kW$ . Εάν η συνολική πραγματική και άεργος ισχύς είναι  $20kW$  και  $10kVAr$ , αντίστοιχα, να υπολογιστούν οι ενδείξεις των υπολοίπων βαττομέτρων.

Ισχύει:

$$Q = \frac{P_1 - P_2 + 2 \cdot P_3}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3} \cdot Q = P_1 - P_2 + 2 \cdot P_3 \Rightarrow P_1 - P_2 = \sqrt{3} \cdot Q - 2 \cdot P_3 \Rightarrow$$

$$P_1 - P_2 = \sqrt{3} \cdot 10 - 2 \cdot 4 \Rightarrow P_1 - P_2 = 9,32.$$

Επίσης,  $P = P_1 + P_2 \Rightarrow P_1 + P_2 = 20.$

Προσθέτοντας κατά μέλη, προκύπτει:  $2 \cdot P_1 = 29,32 \Rightarrow P_1 = 14,66kW$

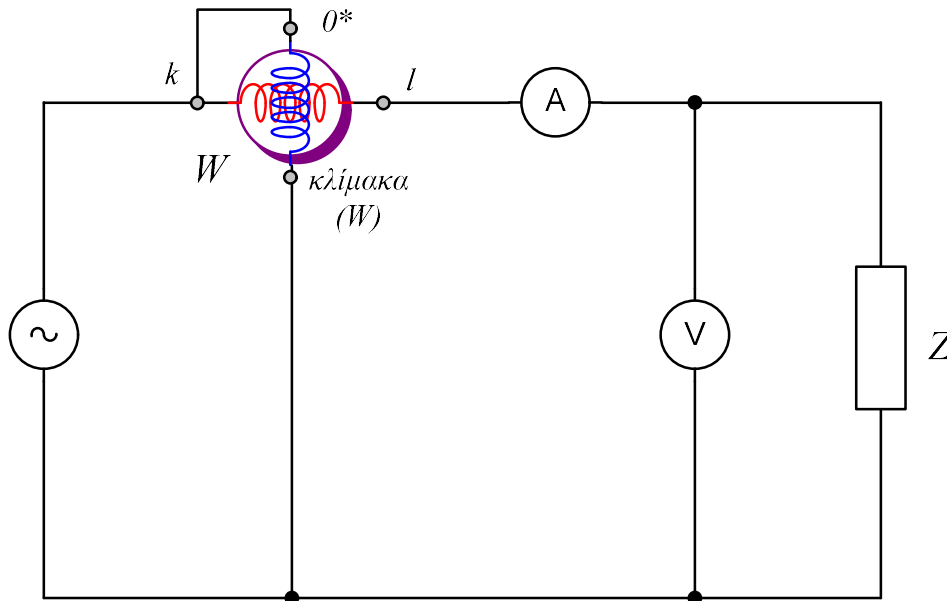
Επομένως:  $P_2 = 20 - P_1 \Rightarrow P_2 = 20 - 14,66 \Rightarrow P_2 = 5,34kW$

## 1.4 Μέτρηση του συντελεστή ισχύος

### 1.4.1 Μέτρηση του συντελεστή ισχύος σε μονοφασικό σύστημα

#### 1.4.1.1 Μέτρηση του συντελεστή ισχύος με βαττόμετρο, βολτόμετρο και αμπερόμετρο

Ο συντελεστής ισχύος υπολογίζεται έμμεσα με χρήση μίας μετρητικής διάταξης η οποία περιλαμβάνει βαττόμετρο, βολτόμετρο και αμπερόμετρο. Η διάταξη αυτή φαίνεται στο σχήμα 1.42.



Σχήμα 1.42 Μέτρηση του συντελεστή ισχύος με βαττόμετρο, βολτόμετρο και αμπερόμετρο

Έστω ένα οποιοδήποτε φορτίο  $Z$ . Εάν η ένδειξη του βαττομέτρου  $W$  είναι ίση με  $P$ , τότε η πραγματική ισχύς που καταναλώνεται στο φορτίο θα δίνεται από την σχέση  $P = |V| \cdot |I| \cdot \cos \varphi$ . Έχοντας γνωστές τις ενδείξεις βολτομέτρου και αμπερομέτρου, προκύπτει:

$$\cos \varphi = \frac{P}{|V| \cdot |I|}$$

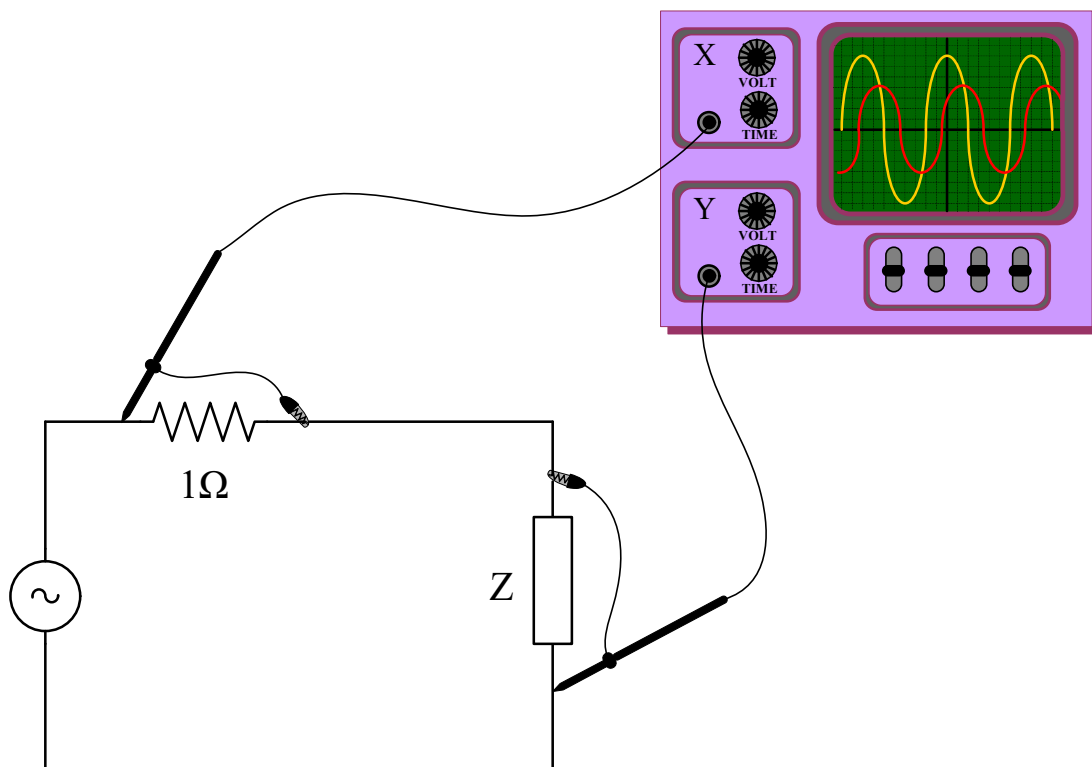


*Η ίδια μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της σύνθετης αντίστασης του φορτίου. Η σύνθετη αντίσταση μπορεί να γραφεί σε πολική μορφή ως  $Z = |Z| \angle \varphi$ . Αρκεί, λοιπόν, να βρεθεί το μέτρο  $|Z|$  και το όρισμα  $\varphi$  αυτής. Από τις ενδείξεις βολτομέτρου και αμπερομέτρου ισχύει  $|Z| = V/I$ , ενώ λαμβάνοντας υπόψη και την ένδειξη του βαττομέτρου  $\varphi = \arccos \{P/V \cdot I\}$ .*

### 1.4.1.2 Μέτρηση του συντελεστή ισχύος με παλμογράφο διπλής δέσμης

Η διαφορά φάσης,  $\varphi$ , μεταξύ του ρεύματος που διαρρέει μια σύνθετη αντίσταση και της τάσης στα άκρα της, εκφράζει το όρισμα της σύνθετης αντίστασης. Επομένως, εάν είναι γνωστή η τιμή της γωνίας  $\varphi$  ενός φορτίου, μπορεί να υπολογιστεί ο αντίστοιχος συντελεστής ισχύος μέσω του  $\cos \varphi$ . Για τον λόγο αυτό, χρησιμοποιείται η μετρητική διάταξη του σχήματος 1.43 η οποία περιλαμβάνει ένα φορτίο  $Z$  σε σειρά με μία ωμική αντίσταση τιμής  $1\Omega$  και έναν παλμογράφο διπλής δέσμης.

Η ωμική αντίσταση  $1\Omega$  χρησιμοποιείται για την έμμεση μέτρηση του ρεύματος στο κύκλωμα μέσω του παλμογράφου, αφού ο τελευταίος μπορεί να μετρήσει τάση και όχι ρεύμα. Στην ουσία ο παλμογράφος μετρά μία τάση η οποία αντιστοιχεί σε ρεύμα, αφού από τον νόμο του *Ohm* ισχύει  $i = u/R \Rightarrow i = u/(1\Omega) \Rightarrow i = u$ .



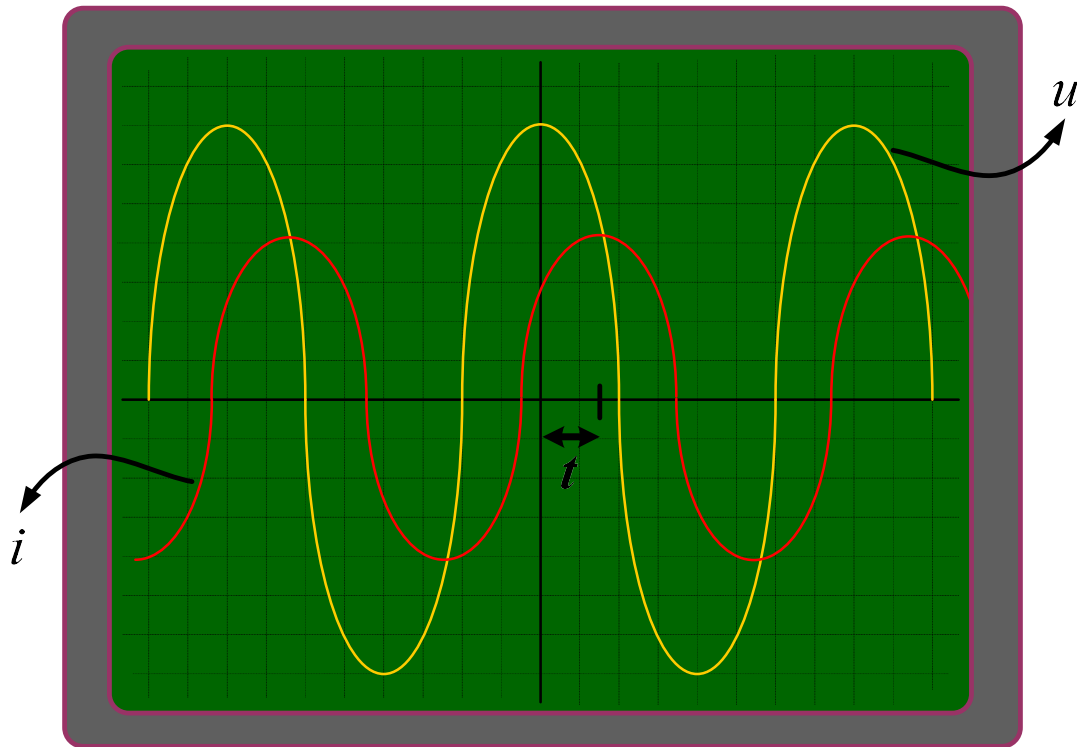
Σχήμα 1.43 Μέτρηση του συντελεστή ισχύος με παλμογράφο διπλής δέσμης

Η επεξήγηση του τρόπου μέτρησης γίνεται μέσω του σχήματος 1.44, το οποίο εμφανίζει ένα στιγμιότυπο των μετρούμενων σημάτων στην οθόνη του παλμογράφου. Έστω ότι  $u$  και  $i$  είναι οι στιγμιαίες τιμές της τάσης και του ρεύματος στο φορτίο.

Εάν η πηγή είναι συχνότητας  $f = \frac{1}{T}$ , όπου  $T$  η περίοδος του σήματος της πηγής

μετρούμενη σε  $s$ , τότε και τα δύο σήματα θα είναι της ίδιας συχνότητας. Η **περίοδος  $T$  μετράται στον οριζόντιο άξονα και ισούται με την "απόσταση" μεταξύ δύο διαδοχικών μεγίστων ή ελαχίστων κορυφών του μετρούμενου σήματος**. Όμως είναι γνωστό ότι μία περίοδος αντιστοιχεί σε μία πλήρη εξέλιξη του φαινομένου, δηλαδή σε έναν κύκλο που ισούται με  $360^\circ$ . Εάν, σε μία περίοδο, η οριζόντια απόσταση μεταξύ των μεγίστων ή ελαχίστων κορυφών των δύο σημάτων είναι  $t$ , τότε αυτό το χρονικό διάστημα μπορεί να εκφραστεί σε μονάδες γωνίας (*deg*) ως εξής:

$$\varphi = 360^\circ \cdot \frac{t}{T}$$



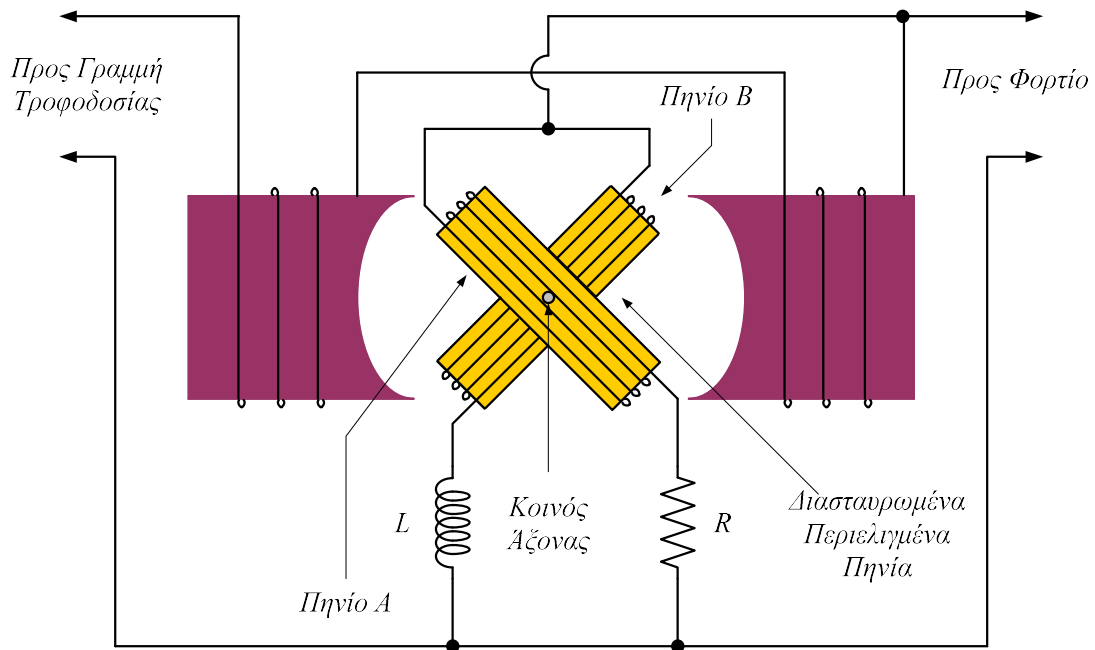
Σχήμα 1.44 Επεξήγηση των μετρήσεων στην οθόνη του παλμογράφου

Η γωνία  $\varphi$  εκφράζει την διαφορά φάσης μεταξύ των δύο μετρούμενων μεγεθών, τάσης και έντασης. Έχοντας την γωνία  $\varphi$  γνωστή, υπολογίζεται το  $\cos \varphi$  που εκφράζει τον συντελεστή ισχύος.

### 1.4.1.3 Μέτρηση της ισχύος με συνημιτόμετρο

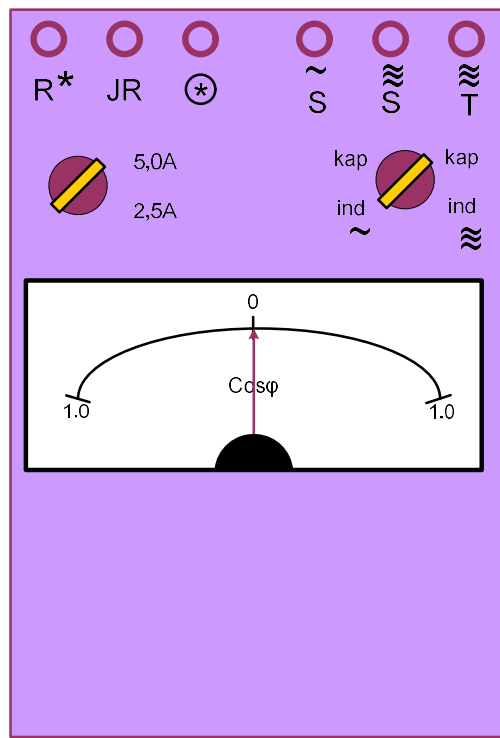
Το **συνημιτόμετρο** ή **φασόμετρο** είναι ένα όργανο παρόμοιο με το βατόμετρο, με την διαφορά ότι έχει δύο περιελιγμένα πηνία τα οποία περιστρέφονται λόγω των δυνάμεων των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων τους (σχήμα 1.45).

Τα πηνία αυτά είναι τοποθετημένα στον ίδιο άξονα και σε απόσταση  $90^\circ$  το ένα από το άλλο. Το ένα πηνίο συνδέεται κατά μήκος της γραμμής (εν σειρά με την αντίσταση), ενώ το άλλο πηνίο συνδέεται κατά μήκος της γραμμής μέσω μιας αυτεπαγωγής. Το ωμικό τμήμα μέσω του πηνίου αντιδρά και παράγει μία ροή ανάλογη της σε φάση συνιστώσας της ισχύος. Το επαγωγικό τμήμα αντιδρά σε αναλογία με την εκτός φάσης συνιστώσα της ισχύος. Εάν ένα φορτίο με μοναδιαίο συντελεστή ισχύος ( $\cos \varphi = 1,0$ ) συνδεθεί στο όργανο, το ρεύμα στο ωμικό τμήμα μέσω του πηνίου  $A$  θα αναπτύξει πλήρη ροπή. Αφού δεν υπάρχει εκτός φάσης συνιστώσα, δεν θα αναπτυχθεί κάποια ροπή μέσω του επαγωγικού τμήματος. Η κίνηση του οργάνου θα είναι πλήρους κλίμακος, που σημαίνει ότι το όργανο θα δείξει μοναδιαίο συντελεστή ισχύος. Καθώς ο συντελεστής ισχύος γίνεται μικρότερος της μονάδας ( $\cos \varphi < 1,0$ ), η ροπή που αναπτύσσεται στο επαγωγικό τμήμα μέσω του πηνίου  $B$  γίνεται μεγαλύτερη.



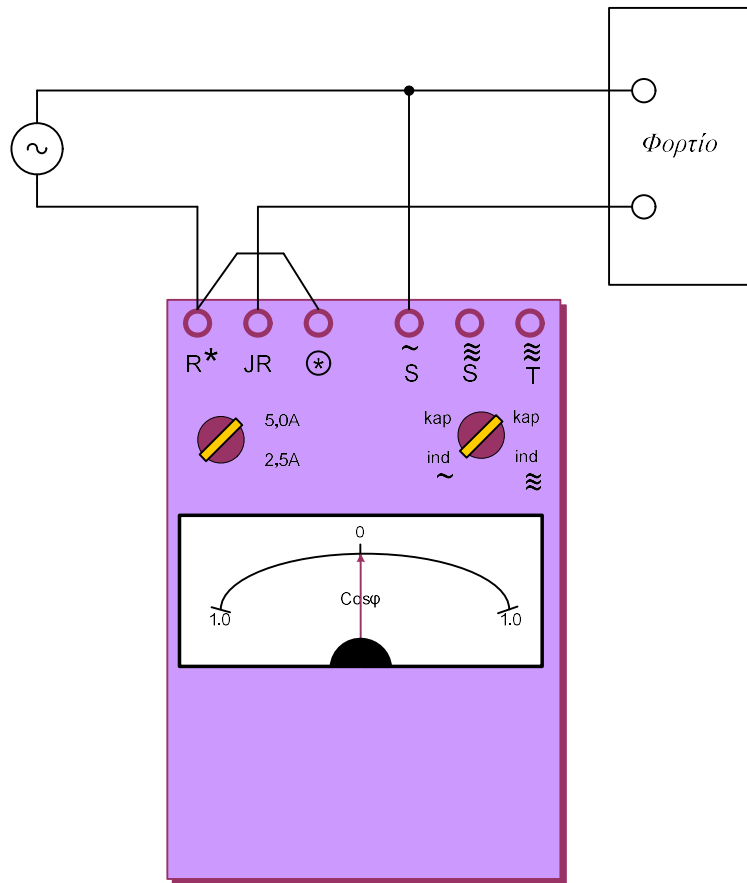
**Σχήμα 1.45 Μηχανισμός μέτρησης μονοφασικού συνημιτομέτρου**

Αυτή η ροπή θα είναι αντίθετη αυτής που αναπτύχθηκε στο ωμικό τμήμα. Επομένως, το όργανο θα δείξει συντελεστή ισχύος μικρότερο της μονάδας. Η κλίμακα του οργάνου πρέπει να είναι βαθμονομημένη έτσι ώστε να μπορεί αυτό να μετρήσει συντελεστή ισχύος σε εύρος από μηδέν έως ένα. Η εξωτερική εμφάνιση του συνημιτομέτρου απεικονίζεται στο σχήμα 1.46.



**Σχήμα 1.46 Εξωτερική εμφάνιση συνημιτομέτρου**

Το συνημιτόμετρο συνδέεται όπως φαίνεται στο σχήμα 1.47.

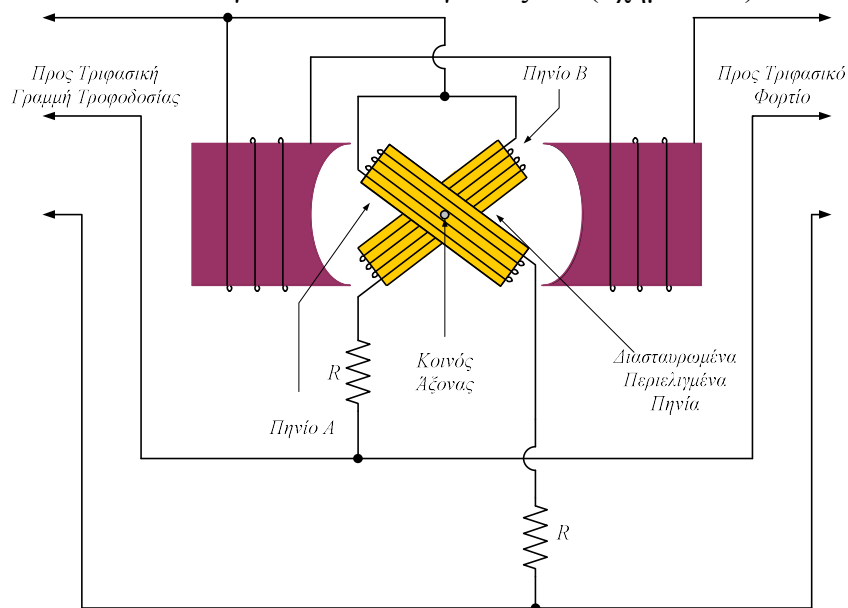


Σχήμα 1.47 Συνδεσμολογία μονοφασικού συνημιτόμετρου

## 1.4.2 Μέτρηση του συντελεστή ισχύος σε τριφασικό σύστημα

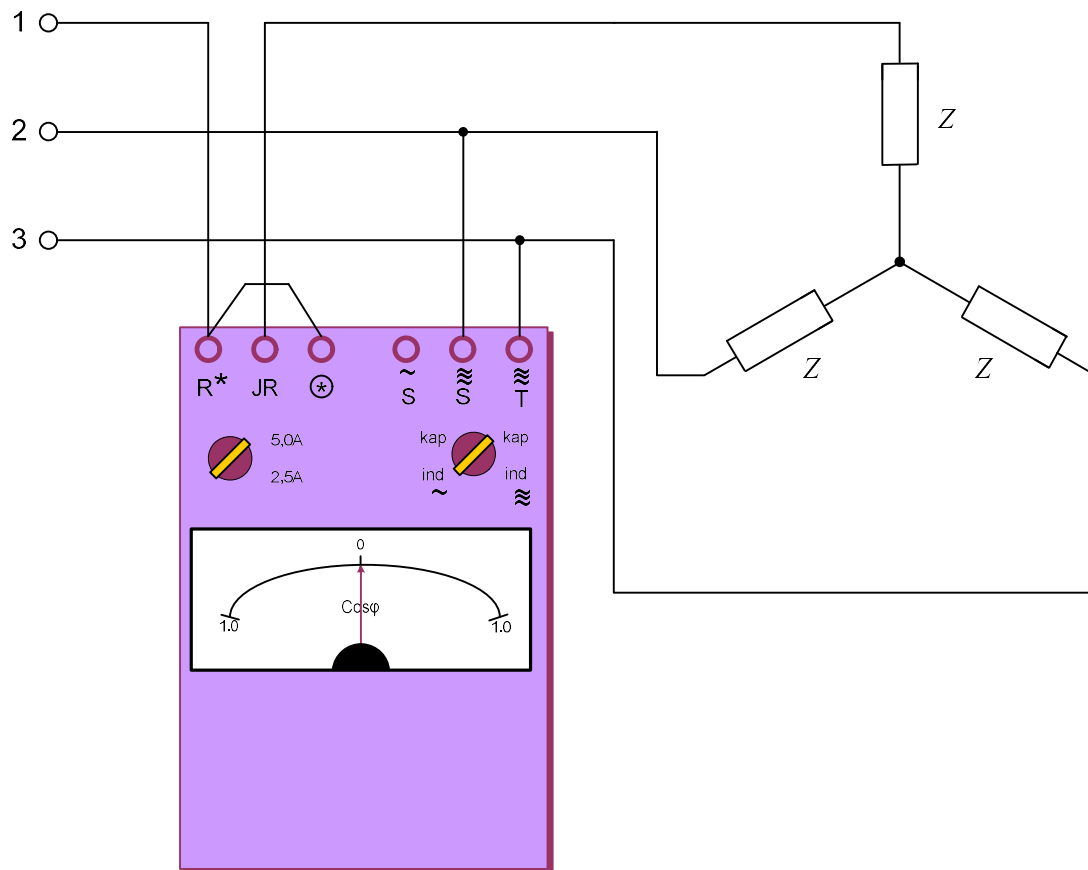
### 1.4.2.1 Μέτρηση του συντελεστή ισχύος σε ισορροπημένο τριφασικό σύστημα με χρήση συνημιτόμετρου

Για την χρήση του συνημιτόμετρου σε ένα ισορροπημένο τριφασικό φορτίο, τα πηνία *A* και *B* τοποθετούνται υπό γωνία  $120^\circ$  αντί γωνίας  $90^\circ$  (σχήμα 1.48).



Σχήμα 1.48 Μηχανισμός μέτρησης τριφασικού συνημιτόμετρου

Το συνημιτόμετρο, για τριφασικό φορτίο, συνδέεται όπως φαίνεται στο σχήμα 1.49. Η ίδια συνδεσμολογία χρησιμοποιείται είτε το τριφασικό φορτίο είναι συνδεδεμένο σε αστέρα, είτε σε τρίγωνο.



Σχήμα 1.49 Συνδεσμολογία τριφασικού συνημιτομέτρου

#### 1.4.2.2 Μέτρηση του συντελεστή ισχύος σε μη ισορροπημένο ή ισορροπημένο τριφασικό σύστημα μέσω βαττομέτρων

Στην περίπτωση μη ισορροπημένου τριφασικού φορτίου, ο συντελεστής ισχύος υπολογίζεται έμμεσα χρησιμοποιώντας την διάταξη ARON του σχήματος 1.33. Χρησιμοποιώντας το διανυσματικό διάγραμμα του σχήματος 1.36, οι ενδείξεις των δύο βαττομέτρων θα είναι:

Βατόμετρο 1:

$$P_1 = V_{1-3} \cdot I_1 \cdot \cos(30^\circ - \varphi) = V_{1-3} \cdot I_1 \cdot (\cos 30^\circ \cdot \cos \varphi + \sin 30^\circ \cdot \sin \varphi)$$

Βατόμετρο 2:

$$P_2 = V_{2-3} \cdot I_2 \cdot \cos(30^\circ + \varphi) = V_{2-3} \cdot I_2 \cdot (\cos 30^\circ \cdot \cos \varphi - \sin 30^\circ \cdot \sin \varphi)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις ενδείξεις των δύο βαττομέτρων και λαμβάνοντας υπόψη ότι για ένα ισορροπημένο φορτίο ισχύει  $I_1 = I_2$  και  $V_{1-3} = V_{2-3}$ , προκύπτει:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\cos 30^\circ \cdot \cos \varphi + \sin 30^\circ \cdot \sin \varphi}{\cos 30^\circ \cdot \cos \varphi - \sin 30^\circ \cdot \sin \varphi}$$

Διαιρώντας με  $\cos 30^\circ \cdot \cos \varphi$  τον αριθμητή και παρονομαστή της τελευταίας σχέσης, προκύπτει:



$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{1 + \tan 30^\circ \cdot \tan \varphi}{1 - \tan 30^\circ \cdot \tan \varphi} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \tan \varphi}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \tan \varphi} \Rightarrow P_1 - \frac{P_1}{\sqrt{3}} \cdot \tan \varphi = P_2 + \frac{P_2}{\sqrt{3}} \cdot \tan \varphi \Rightarrow$$

$$P_1 - P_2 = (P_1 + P_2) \cdot \frac{\tan \varphi}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\tan \varphi = \sqrt{3} \cdot \left( \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} \right) \quad (43)$$

Συνεπώς:  $\varphi = \arctan \left[ \sqrt{3} \cdot \left( \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} \right) \right]$  και  $\cos \varphi = \cos \left\{ \arctan \left[ \sqrt{3} \cdot \left( \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} \right) \right] \right\}$ .



*Είναι δυνατό, ανάλογα με τον συντελεστή ισχύος του φορτίου, ένα βατόμετρο να πρέπει να "αντιστραφεί" για να ληφθεί η ένδειξη. Σε μια τέτοια περίπτωση η ένδειξη λαμβάνεται ως αρνητική.*

#### 1.4.2.3 Μέτρηση του συντελεστή ισχύος σε μη ισορροπημένο τριφασικό σύστημα μέσω νομογραφήματος

Στην περίπτωση μη ισορροπημένου τριφασικού συστήματος, θεωρούμε την περίπτωση τριών βατομέτρων των οποίων οι ενδείξεις είναι  $P_1$ ,  $P_2$  και  $P_3$ . Όπως αποδείχθηκε σε προηγούμενη παράγραφο η συνολική πραγματική και άεργος ισχύς που καταναλώνεται στο φορτίο θα είναι:

$$P = P_1 + P_2$$

και

$$Q = \frac{(P_1 - P_2 + 2P_3)}{\sqrt{3}}$$

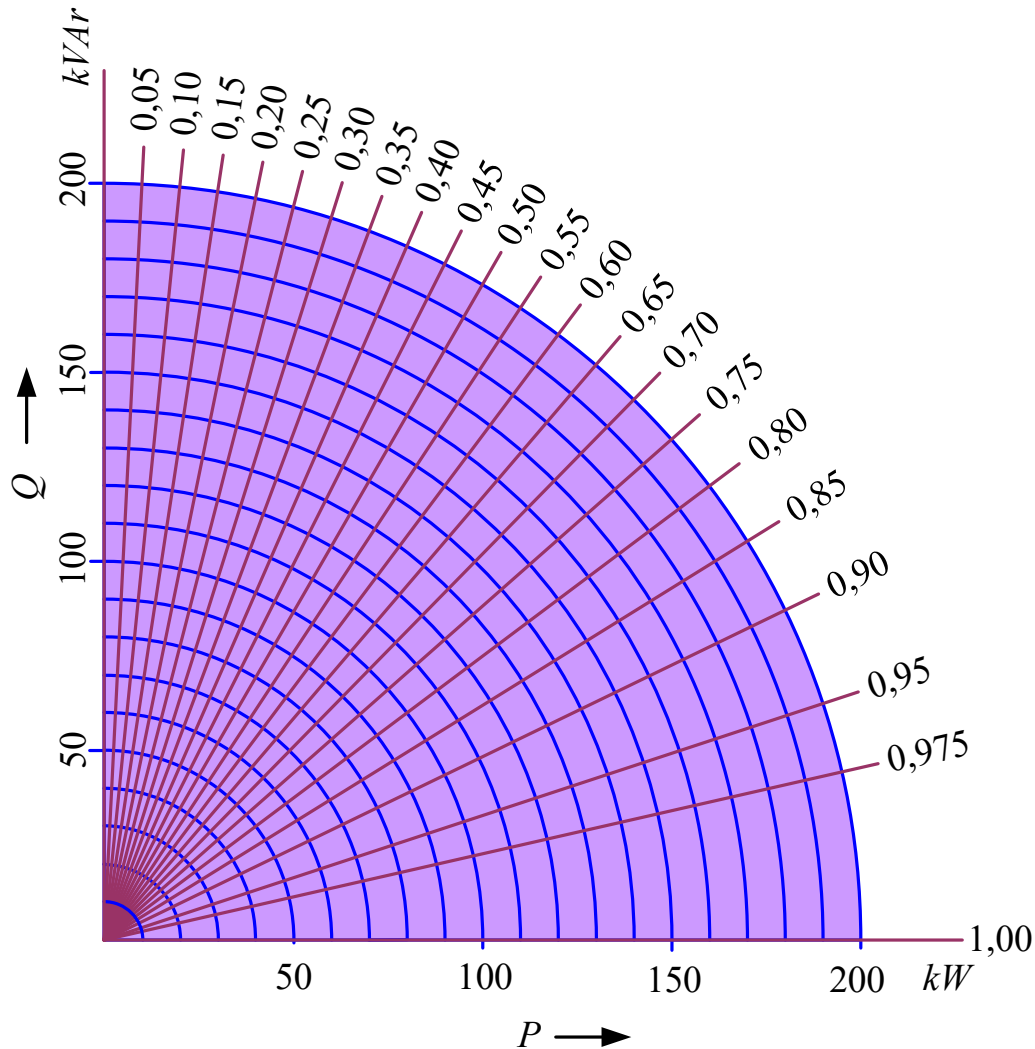
Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις, προκύπτει:

$$\tan \varphi = \frac{Q}{P} = \frac{P_1 - P_2 + 2P_3}{\sqrt{3}(P_1 + P_2)} \quad (44)$$

Όμως

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{(1 + \tan^2 \varphi)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{Q}{P} \right)^2}} \quad (45)$$

Η γραφική παράσταση της σχέσης (45) εικονίζεται στο διάγραμμα του σχήματος 1.50. Το διάγραμμα αυτό χαρακτηρίζεται ως **νομογράφημα** και μέσω αυτού είναι δυνατή η απευθείας εύρεση του  $\cos \varphi$  από το λόγο  $\frac{P}{Q}$  ή  $\frac{Q}{P}$ .



Σχήμα 1.50 Νομογράφημα προσδιορισμού ισχύος

**Πρόβλημα 1.23.** Δύο βαττόμετρα συνδέονται για να μετρήσουν την εισερχόμενη ισχύ σε ένα ισορροπημένο τριφασικό φορτίο, με την μέθοδο των δύο βαττομέτρων. Εάν οι ενδείξεις των οργάνων είναι  $8kW$  και  $4 kW$ , να υπολογιστούν (α) η συνολική ισχύς εισόδου και (β) ο συντελεστής ισχύος του φορτίου.

(α) Η συνολική ισχύς εισόδου είναι:  $P = P_1 + P_2 \Rightarrow P = 8 + 4 \Rightarrow P = 12kW$

(β)  $\tan \varphi = \sqrt{3} \cdot \left( \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} \right) = \sqrt{3} \cdot \left( \frac{8 - 4}{8 + 4} \right) = \sqrt{3} \cdot \left( \frac{4}{12} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Έτσι  $\varphi = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow \varphi = 30^\circ$ . Επομένως  $\cos \varphi = \cos 30^\circ = 0,866$ .

**Πρόβλημα 1.24.** Δύο βαττόμετρα που συνδέονται σε έναν τριφασικό κινητήρα δείχνουν ότι η συνολική ισχύς είναι  $12kW$ . Ο συντελεστής ισχύος είναι  $0,6$ . Να υπολογιστούν οι ενδείξεις των δύο βαττομέτρων.

Εάν οι ενδείξεις των δύο βαττομέτρων είναι  $P_1$  και  $P_2$ , αντίστοιχα, τότε:

$$P_1 + P_2 = 12kW \quad (1).$$

Επίσης  $\cos \varphi = 0,6 \Rightarrow \varphi = \arccos(0,6) \Rightarrow \varphi = 53,13^\circ$ . Όμως  $\tan \varphi = \sqrt{3} \cdot \left(\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}\right)$ .

$$\text{Έτσι } \tan 53,13^\circ = 1,3333 = \frac{\sqrt{3} \cdot (P_1 - P_2)}{12} \Rightarrow$$

$$P_1 - P_2 = 9,237kW \quad (2).$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη, θα έχουμε:

$$2P_1 = 21,237kW \Rightarrow P_1 = 10,62kW.$$

Επομένως η ένδειξη του βαττομέτρου 1 είναι  $10,62kW$ . Έτσι, από την σχέση (1), η ένδειξη του βαττομέτρου 2 θα είναι  $(12 - 10,62)kW = 1,38kW$ .

**Πρόβλημα 1.25.** Δύο βαττόμετρα, όταν συνδέονται για να μετρήσουν την ισχύ εισόδου ενός τριφασικού ισορροπημένου φορτίου, δείχνουν  $10kW$  και  $3kW$  αντίστοιχα. Στο βαττόμετρο που δείχνει ένδειξη  $3kW$  είναι ενεργοποιημένος ο διακόπτης αντιστροφής. Να υπολογιστούν (α) η ισχύς εισόδου και (β) ο συντελεστής ισχύος του φορτίου.

(α) Η συνολική ισχύς εισόδου είναι:  $P = P_1 + P_2 \Rightarrow P = 10 + (-3) \Rightarrow P = 7kW$

$$(β) \tan \varphi = \sqrt{3} \cdot \left(\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}\right) = \sqrt{3} \cdot \left(\frac{10 - (-3)}{10 + (-3)}\right) = \sqrt{3} \cdot \left(\frac{13}{7}\right) = 3,2167$$

Έτσι  $\varphi = \arctan(3,2167) \Rightarrow \varphi = 72,73^\circ$ . Επομένως  $\cos \varphi = \cos 72,73^\circ = 0,297$ .

**Πρόβλημα 1.26.** Τρία πανομοιότυπα πηνία, που το καθένα έχει ωμική αντίσταση  $8\Omega$  και επαγωγική αντίσταση  $8\Omega$  συνδέονται (α) σε αστέρα και (β) σε τρίγωνο, ενώ τροφοδοτούνται μέσω μίας τριφασικής παροχής  $415V$ . Να υπολογιστούν, για κάθε σύνδεση, οι ενδείξεις των βαττομέτρων που χρησιμοποιούνται για να μετρήσουμε την συνολική ισχύ με την μέθοδο των δύο βαττομέτρων.

(α) Σύνδεσμολογία αστέρα:  $V_L = \sqrt{3} \cdot V_p$  και  $I_L = I_p$ .

Η φασική τάση θα είναι  $V_p = \frac{V_L}{\sqrt{3}} = \frac{415}{\sqrt{3}}$  και η σύνθετη αντίσταση

$$Z_p = \sqrt{R_p^2 + X_L^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} \Rightarrow Z_p = 11,31\Omega.$$

Έτσι το φασικό ρεύμα θα είναι  $I_p = \frac{V_p}{Z_p} = \frac{415/\sqrt{3}}{11,31} = 21,18A.$

Η συνολική ισχύς θα ισούται με  $P = 3 \cdot I_p^2 \cdot R_p = 3 \cdot 21,18^2 \cdot 8 \Rightarrow P = 10766W.$

Εάν οι ενδείξεις των δύο βαττομέτρων είναι  $P_1$  και  $P_2$ , αντίστοιχα, τότε:

$$P_1 + P_2 = 10766W \text{ (i).}$$

Αφού  $R_p = X_L = 8\Omega$ , η φασική γωνία θα είναι  $\varphi = 45^\circ$  αφού  $\tan \varphi = \frac{R_p}{X_L} = 1,00.$

Έτσι,  $\tan \varphi = \sqrt{3} \cdot \left( \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} \right) \Rightarrow \tan 45^\circ = \sqrt{3} \cdot \frac{(P_1 - P_2)}{10766} \Rightarrow P_1 - P_2 = \frac{10766 \cdot 1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$$P_1 - P_2 = 6216W \text{ (ii).}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (i) και (ii) έχουμε:

$$2P_1 = 10766 + 6216 = 16982 \Rightarrow P_1 = \frac{16982}{2} \Rightarrow P_1 = 8491W. \text{ Με αντικατάσταση στην}$$

(i), προκύπτει  $P_2 = 10766 - 8491 \Rightarrow P_2 = 2275W.$

Επομένως, όταν τα πηνία συνδέονται σε αστέρα οι ενδείξεις των δύο βαττομέτρων είναι  $8,491kW$  και  $2,275kW$ .

**(β) Συνδεσμολογία τριγώνου:**  $V_L = V_p$  και  $I_L = \sqrt{3} \cdot I_p.$

Το φασικό ρεύμα θα είναι  $I_p = \frac{V_p}{Z_p} = \frac{415}{11,31} = 36,69A.$

Η συνολική ισχύς θα ισούται με  $P = 3 \cdot I_p^2 \cdot R_p = 3 \cdot 36,69^2 \cdot 8 \Rightarrow P = 32310W.$

Εάν οι ενδείξεις των δύο βαττομέτρων είναι  $P_1$  και  $P_2$ , αντίστοιχα, τότε:

$$P_1 + P_2 = 32310W \text{ (iii).}$$

Αφού  $R_p = X_L = 8\Omega$ , η φασική γωνία θα είναι  $\varphi = 45^\circ$  αφού  $\tan \varphi = \frac{R_p}{X_L} = 1,00.$

Έτσι,  $\tan \varphi = \sqrt{3} \cdot \left( \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} \right) \Rightarrow \tan 45^\circ = \sqrt{3} \cdot \frac{(P_1 - P_2)}{32310} \Rightarrow P_1 - P_2 = \frac{32310 \cdot 1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$$P_1 - P_2 = 18650W \text{ (iv).}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (iii) και (iv) έχουμε:

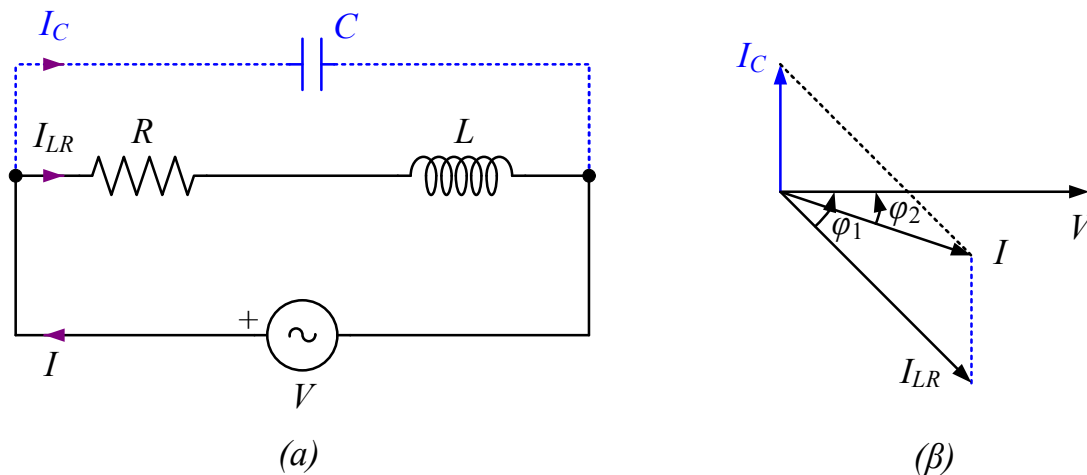
$$2P_1 = 32310 + 18650 = 50960 \Rightarrow P_1 = \frac{50960}{2} \Rightarrow P_1 = 25480W. \text{ Με αντικατάσταση}$$

στην (iii), προκύπτει  $P_2 = 32310 - 25480 \Rightarrow P_2 = 6830W.$

Επομένως, όταν τα πηνία συνδέονται σε τρίγωνο οι ενδείξεις των δύο βαττομέτρων είναι  $25,480kW$  και  $6,830kW$ .

### 1.4.3 Βελτίωση του συντελεστή ισχύος

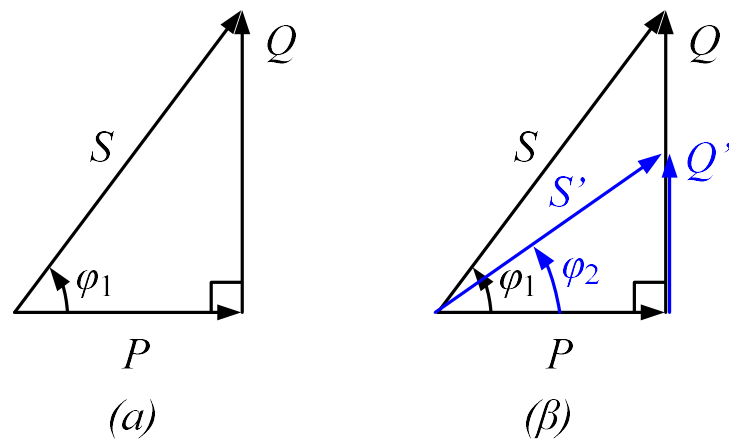
Διατηρώντας την πραγματική ισχύ σταθερή, ένας υψηλός συντελεστής ισχύος μειώνει το ρεύμα που "κυκλοφορεί" στο κύκλωμα και επομένως μειώνει το κόστος των καλωδίων, μετασχηματιστών, ακροκιβωτίων και γεννητριών. Στην αγορά ενέργειας προσφέρονται τιμολόγια τα οποία ενθαρρύνουν τους καταναλωτές να λειτουργούν με ένα σχετικά υψηλό συντελεστή ισχύος. Μία μέθοδος για την βελτίωση του συντελεστή ισχύος ενός επαγωγικού φορτίου είναι να συνδέεται μία συστοιχία πυκνωτών παράλληλα με το φορτίο. Οι πυκνωτές χαρακτηρίζονται με τα  $VAr$  και στόχος τους είναι η μείωση της αέργου ισχύος του συστήματος χωρίς να μεταβάλλεται η πραγματική ισχύς. Τα περισσότερα οικιακά και βιομηχανικά φορτία είναι επαγωγικά, που σημαίνει ότι λειτουργούν με έναν συντελεστή ισχύος μεταπορείας. Ένα απλοποιημένο κυκλωματικό διάγραμμα φαίνεται στο σχήμα 1.51(α) όπου ένας πυκνωτής  $C$  συνδέεται στα άκρα ενός επαγωγικού φορτίου. Προτού συνδεθεί ο πυκνωτής, το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι  $I_{LR}$  και καθυστερεί της τάσης  $V$  κατά μία γωνία  $\varphi_1$  όπως φαίνεται στο σχήμα 1.51(β).



Σχήμα 1.51 Βελτίωση του συντελεστή ισχύος με πυκνωτή

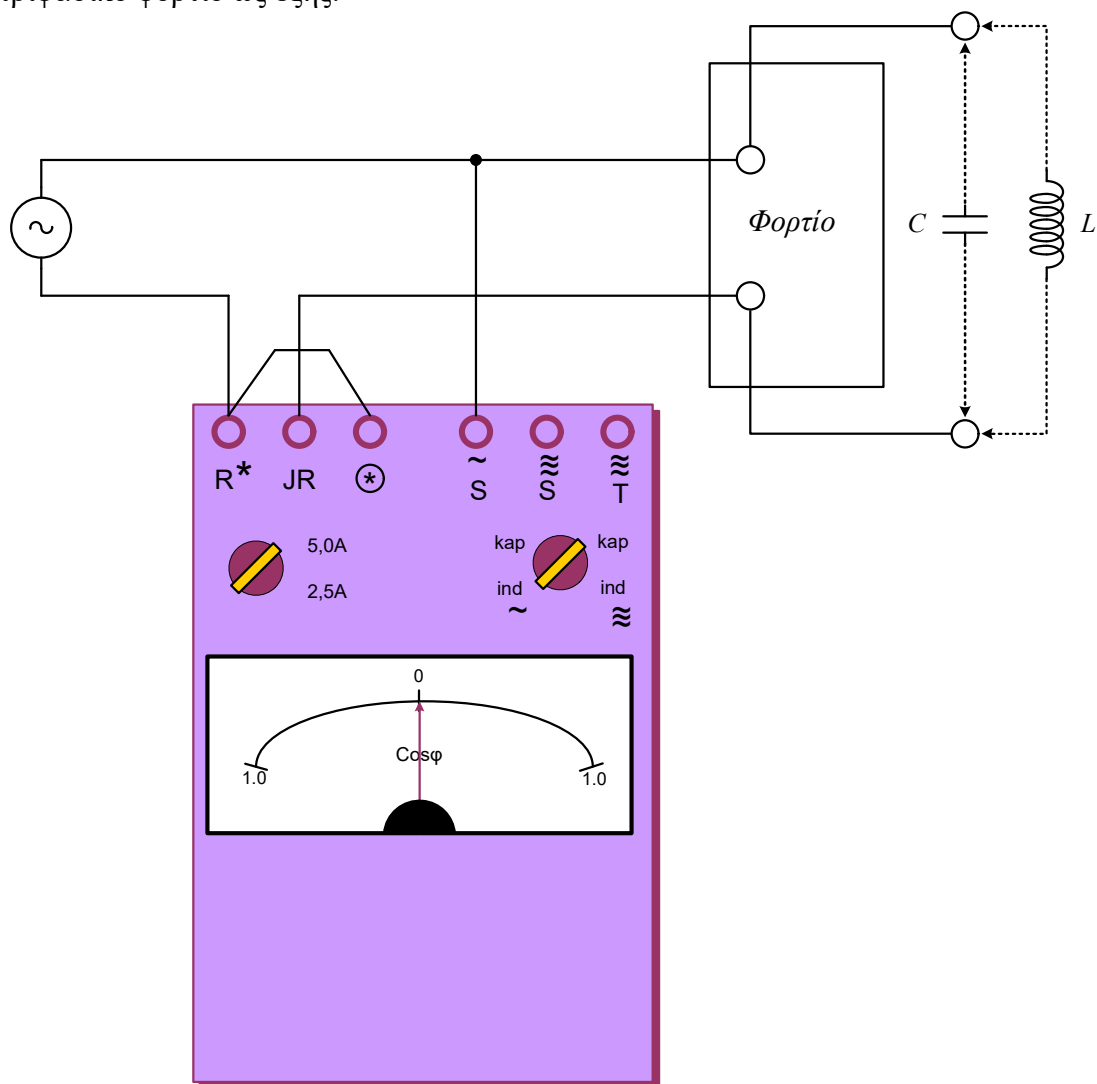
Όταν ο πυκνωτής  $C$  συνδέεται, απορροφά ένα ρεύμα  $I_C$  το οποίο φαίνεται να προηγείται της τάσης  $V$  κατά γωνία  $90^\circ$ . Το ρεύμα του κυκλώματος  $I$ , στο σχήμα 1.51(α), είναι το διανυσματικό άθροισμα των ρευμάτων  $I_{LR}$  και  $I_C$  όπως φαίνεται στο σχήμα 1.51(β). Η φασική γωνία του κυκλώματος, δηλαδή η γωνία μεταξύ της τάσης  $V$  και του ρεύματος  $I$ , έχει μειωθεί από  $\varphi_1$  σε  $\varphi_2$  και ο συντελεστής ισχύος έχει βελτιωθεί από  $\cos \varphi_1$  σε  $\cos \varphi_2$ . Το σχήμα 1.52(α) δείχνει το τρίγωνο ισχύος για ένα επαγωγικό κύκλωμα με συντελεστή ισχύος μεταπορείας  $\cos \varphi_1$ . Στο σχήμα 1.52(β), η γωνία  $\varphi_1$  έχει μειωθεί σε  $\varphi_2$ , που σημαίνει ότι ο συντελεστής ισχύος έχει βελτιωθεί από  $\cos \varphi_1$  σε  $\cos \varphi_2$ , εισάγοντας  $VAr$  προπορείας, το οποίο επιτυγχάνεται συνδέοντας πυκνωτές παράλληλα με το επαγωγικό φορτίο. Ο συντελεστής ισχύος βελτιώνεται μειώνοντας την άεργο ισχύ, ενώ η πραγματική ισχύς παραμένει αμετάβλητη. Η βελτίωση του συντελεστή ισχύος συμβάλει στην μείωση της φαινόμενης ισχύος και κατά συνέπεια στην μείωση του ρεύματος, έτσι ώστε το σύστημα διανομής ηλεκτρικής ενέργειας να χρησιμοποιηθεί πιο αποτελεσματικά. Ένας άλλος τρόπος για την μείωση του συντελεστή ισχύος, πέρα από την χρήση

στατικών πυκνωτών, είναι χρησιμοποιώντας σύγχρονες μηχανές οι οποίες κατασκευάζονται για να λειτουργούν με συντελεστές ισχύος προπορείας.

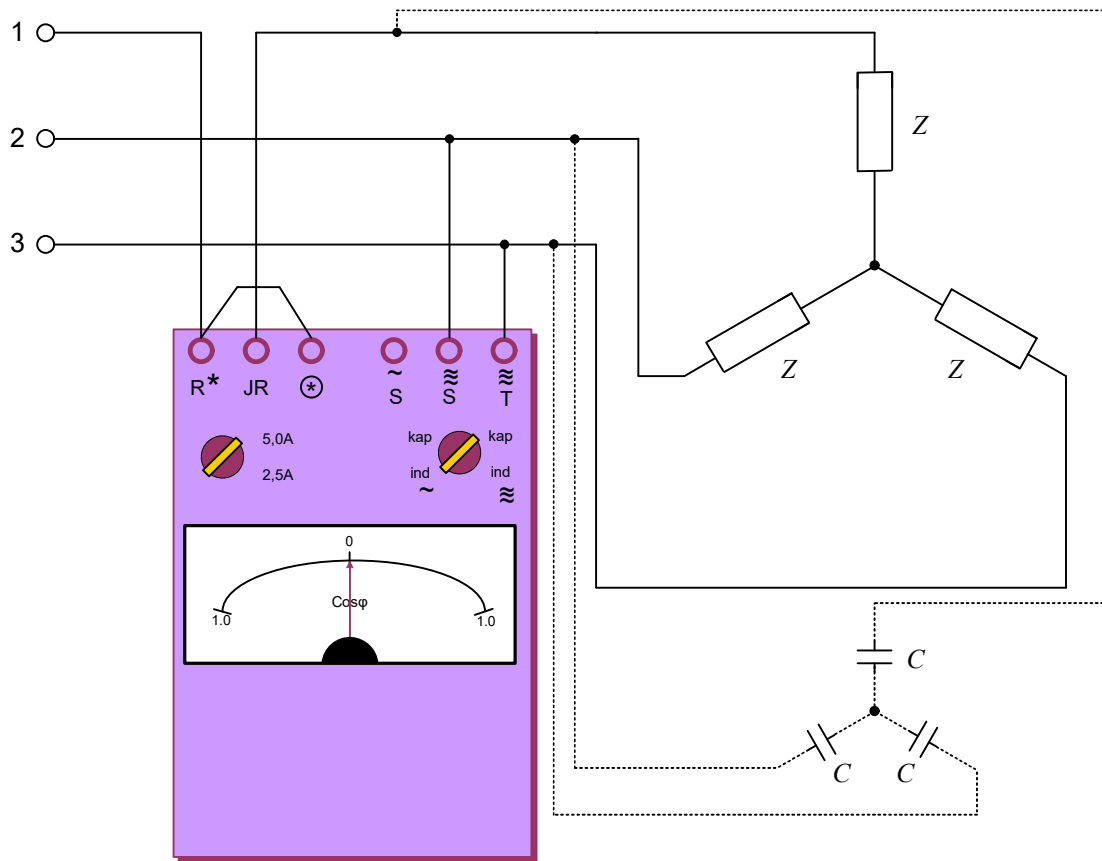


Σχήμα 1.52 Τρίγωνα ισχύος (α) προ και (β) μετά την βελτίωση του συντελεστή ισχύος

Η βελτίωση του συντελεστή ισχύος επιτυγχάνεται πειραματικά για μονοφασικό και τριφασικό φορτίο ως εξής:



Σχήμα 1.53 Βελτίωση του συντελεστή ισχύος σε μονοφασικό κύκλωμα



Σχήμα 1.54 Βελτίωση του συντελεστή ισχύος σε τριφασικό κύκλωμα



*Οι ίδιες διατάξεις χρησιμοποιούνται για την βελτίωση του συντελεστή ισχύος είτε αυτή είναι χωρητική (με πυκνωτή), είτε επαγωγική (με πηνίο).*



*Στην περίπτωση των τριφασικών φορτίων η βελτίωση του συντελεστή ισχύος επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας πυκνωτές ή πηνία σε συνδεσμολογία τόσο αστέρα, όσο και τριγώνου.*

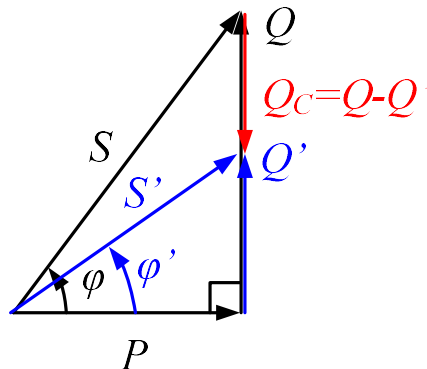
**Πρόβλημα 1.27.** Ένας μετασχηματιστής 300kVA λειτουργεί υπό πλήρες φορτίο με συντελεστή ισχύος 0,70 μεταπορείας. Ο συντελεστής ισχύος βελτιώνεται προσθέτοντας πυκνωτές παράλληλα στον μετασχηματιστή μέχρι ο συντελεστής ισχύος να βελτιωθεί σε 0,90 μεταπορείας. Να υπολογιστεί η τιμή των πυκνωτών που χρησιμοποιήθηκαν σε kVAr.

Σε πλήρες φορτίο, η πραγματική ισχύς δίνεται από την σχέση  $P = V \cdot I \cdot \cos \varphi \Rightarrow P = S \cdot \cos \varphi \Rightarrow P = 300 \cdot 0,7 \Rightarrow P = 210kW$ . Με βάση τον συντελεστή ισχύος προκύπτει  $\cos \varphi = 0,7 \Rightarrow \varphi = \arccos 0,7 \Rightarrow \varphi = 45,57^\circ$ . Επομένως η άεργος ισχύς θα είναι  $Q = V \cdot I \cdot \sin \varphi \Rightarrow Q = S \cdot \sin \varphi \Rightarrow Q = 300 \cdot \sin 45,57^\circ \Rightarrow Q = 214,2kVAr$  μεταπορείας. Αφού ο συντελεστής ισχύος πρέπει να βελτιωθεί σε 0,9 μεταπορείας, αυτό σημαίνει ότι  $\cos \varphi' = 0,9 \Rightarrow \varphi' = \arccos 0,9 \Rightarrow \varphi' = 25,84^\circ$ . Από το τρίγωνο ισχύος του σχήματος 1.55 προκύπτει:

$$\tan \varphi' = \frac{Q'}{P} \Rightarrow Q' = P \cdot \tan \varphi' \Rightarrow Q' = 210 \cdot \tan 25,84^\circ \Rightarrow Q' = 101,7kVAr$$

Η τιμή των πυκνωτών σε kVAr υπολογίζεται ως:

$$Q_C = Q - Q' \Rightarrow Q_C = 214,2 - 101,7 \Rightarrow Q_C = 112,5kVAr \text{ προπορείας.}$$



Σχήμα 1.55 Τρίγωνο ισχύος για το πρόβλημα 1.27

**Πρόβλημα 1.28.** Ένα κύκλωμα εμφανίζει σύνθετη αντίσταση  $Z = (3 + j \cdot 4)\Omega$  και τροφοδοτείται από μία πηγή  $V = 50 \angle 30^\circ$  με συχνότητα 1,5kHz. Να υπολογιστούν: (α) το ρεύμα της πηγής, (β) η πραγματική, φαινόμενη και άεργος ισχύς, (γ) ο πυκνωτής που πρέπει να συνδεθεί παράλληλα με την σύνθετη αντίσταση  $Z$  για να βελτιωθεί ο συντελεστής ισχύος του κυκλώματος σε 0,966 μεταπορείας και (δ) η τιμή της χωρητικότητας ώστε να βελτιωθεί ο συντελεστής ισχύος σε 0,966 μεταπορείας.



α) Το ρεύμα είναι  $I = \frac{V}{Z} \Rightarrow I = \frac{50\angle 30^\circ}{(3 + j \cdot 4)} \Rightarrow I = \frac{50\angle 30^\circ}{5\angle 53,13^\circ} \Rightarrow I = 10\angle -23,13^\circ A$

β) Η μιγαδική ισχύς είναι  $\tilde{S} = V \cdot I^* \Rightarrow \tilde{S} = 50\angle 30^\circ \cdot 10\angle 23,13^\circ \Rightarrow \tilde{S} = 500\angle 53,13^\circ \Rightarrow \tilde{S} = 300 + j \cdot 400$ . Επομένως:

- η φαινόμενη ισχύς είναι  $S = |\tilde{S}| = 500VA$

- η πραγματική ισχύς είναι  $P = \text{Re}\{\tilde{S}\} = 300W$

- η άεργος ισχύς είναι  $Q = \text{Ime}\{\tilde{S}\} = 400VAr$ , προπορείας.

Η διαφορά φάσης μεταξύ τάσης και ρεύματος είναι  $\varphi = 53,13^\circ \Rightarrow$

$\cos \varphi = \cos 53,13^\circ = 0,6$ .

Το τρίγωνο ισχύος φαίνεται στο σχήμα 1.56.

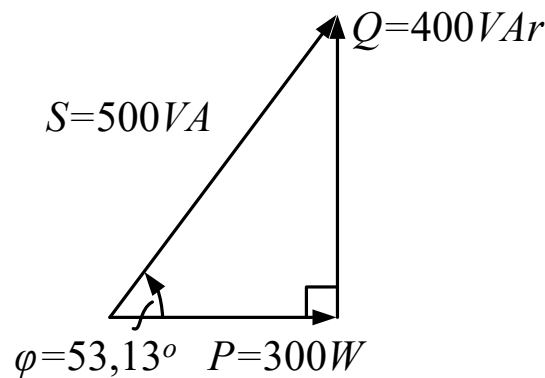
γ) Ο συντελεστής ισχύος 0,966 σημαίνει ότι  $\cos \varphi' = 0,966 \Rightarrow$

$\varphi' = \arccos 0,966 \Rightarrow \varphi' = 15^\circ$ . Κάνοντας την βελτίωση από  $\cos \varphi = 0,6$  σε  $\cos \varphi' = 0,966$ , προκύπτει το νέο τρίγωνο ισχύος του σχήματος 1.57. Από το σχήμα

αυτό έχουμε  $\tan \varphi' = \frac{Q'}{P} \Rightarrow Q' = P \cdot \tan \varphi' \Rightarrow Q' = 300 \cdot \tan 15^\circ \Rightarrow Q' = 80,38VAr$ .

Επομένως, η τιμή των πυκνωτών σε  $kVAr$  υπολογίζεται ως:

$Q_C = Q - Q' \Rightarrow Q_C = 400 - 80,83 \Rightarrow Q_C = 319,6VAr$ , προπορείας.



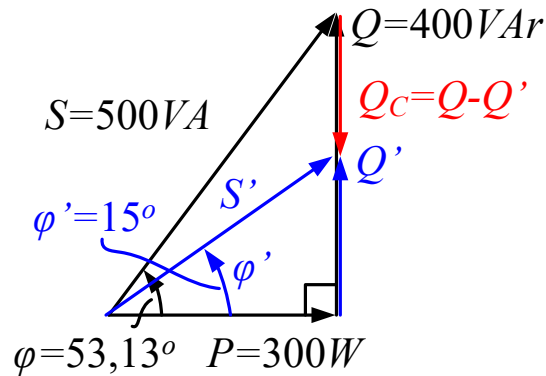
Σχήμα 1.56 Τρίγωνο ισχύος για το πρόβλημα 1.28(β)

δ) Το ρεύμα στον πυκνωτή θα είναι:  $I_C = \frac{Q_C}{V} \Rightarrow I_C = \frac{319,6}{50} \Rightarrow I_C = 6,39A$ .

Η χωρητική αντίσταση θα είναι:  $X_C = \frac{V}{I_C} \Rightarrow X_C = \frac{50}{6,39} \Rightarrow X_C = 7,82\Omega$ .

Έτσι:  $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega \cdot X_C} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega \cdot X_C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot X_C} \Rightarrow$

$C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 1500 \cdot 7,82} F \Rightarrow C = 13,57\mu F$ .



Σχήμα 1.57 Τρίγωνο ισχύος για το πρόβλημα 1.28(γ)

### 1.5 Μέτρηση της ηλεκτρικής ενέργειας

Το όργανο που χρησιμοποιείται για την μέτρηση της ποσότητας του ηλεκτρισμού ή ηλεκτρικής ενέργειας, σε μία χρονική περίοδο  $t$  είναι γνωστό ως μετρητής ενέργειας ή μετρητής βαττώρας. Με άλλα λόγια, η ενέργεια είναι το συνολικό ποσό της ισχύος που αποδίδεται ή καταναλώνεται σε ένα χρονικό διάστημα  $t$  και μπορεί να εκφραστεί ως:

$$W = \int_0^t u(t) \cdot i(t) \cdot dt$$

Εάν η τάση  $u(t)$  εκφράζεται σε  $V$ , το ρεύμα  $i(t)$  σε  $A$  και ο χρόνος  $t$  σε  $s$ , η μονάδα ενέργειας θα ισούται με  $J$  ή  $W \cdot s$ . Η "εμπορική" μονάδα της ηλεκτρικής ενέργειας είναι η "κιλοβατώρα" ( $kWh$ ).

#### 1.5.1 Μέτρηση της ηλεκτρικής ενέργειας με μονοφασικό επαγωγικό μετρητή

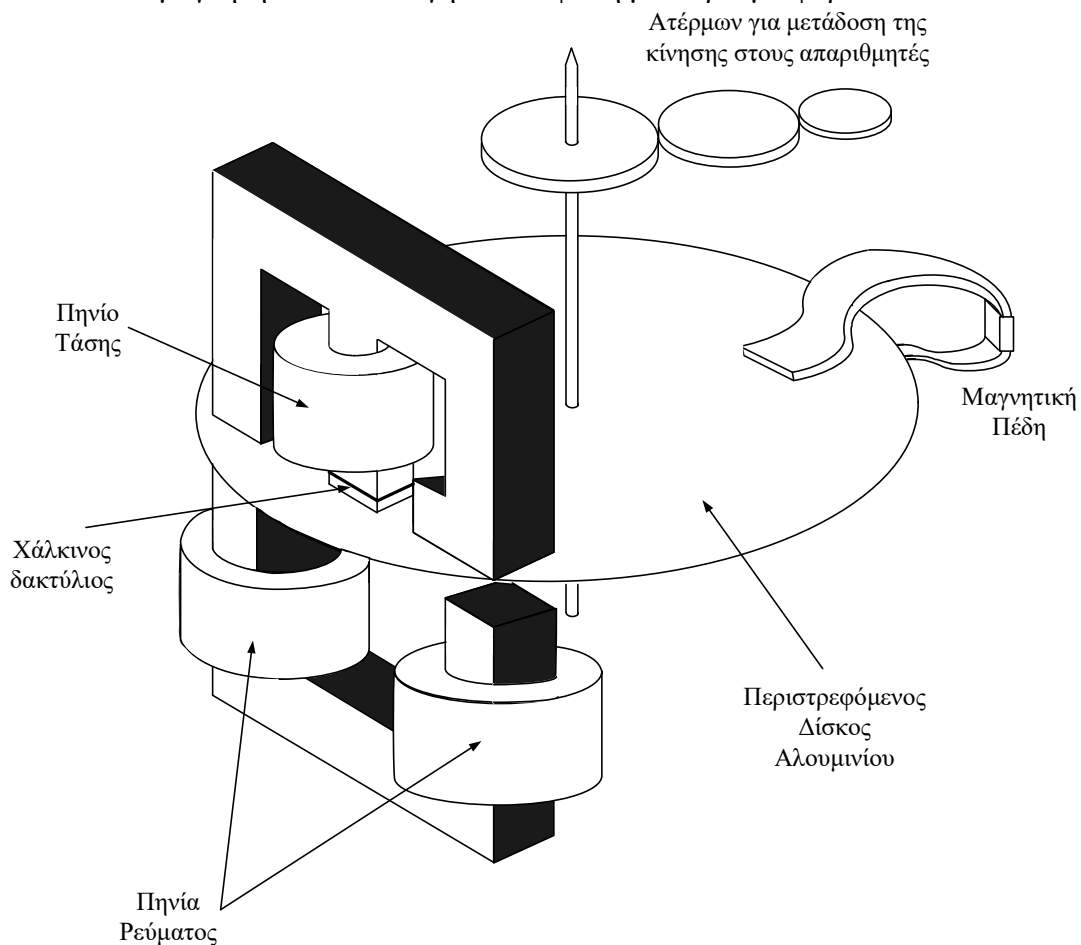
Για την μέτρηση της ηλεκτρικής ενέργειας σε ένα εναλλασσόμενο κύκλωμα, ο μετρητής βασίζεται στην αρχή της "ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής". Τα όργανα αυτά είναι γνωστά ως όργανα επαγωγικού τύπου. Η μέτρηση της ενέργειας που βασίζεται στην αρχή της επαγωγής είναι κατάλληλη τόσο για βιομηχανικούς, όσο και για οικιακούς καταναλωτές λαμβανομένης υπόψη της ελαφριάς και στιβαρής κατασκευής του περιστρεφόμενου μέρους. Επιπλέον, εξαιτίας των απειροελάχιστων μεταβολών στην τάση και συχνότητα της πηγής τροφοδοσίας, η ακρίβεια των επαγωγικών μετρητών δεν επηρεάζεται από τις μεταβολές αυτές. Εάν η κυματομορφή της τάσης της πηγής διαταραχθεί αισθητά, τότε η ακρίβεια του μετρητή επίσης επηρεάζεται. Για να μπορεί ο μετρητής να "διαβάσει" σωστά την κατανάλωση ενέργειας, η ταχύτητα του κινητού συστήματος πρέπει να είναι ανάλογη της ισχύος στο κύκλωμα στο οποίο ο μετρητής συνδέεται.

Ο μετρητής ενέργειας επαγωγικού τύπου αποτελείται από τα ακόλουθα συστήματα:

(α) Σύστημα οδήγησης (β) Σύστημα κίνησης (γ) Σύστημα πέδησης και (δ) Σύστημα καταγραφής.

- Σύστημα οδήγησης: Η κατασκευή του ηλεκτρομαγνητικού συστήματος φαίνεται στο σχήμα 1.58 και αποτελείται από δύο ηλεκτρομαγνήτες, που καλούνται "εγκάρσιος" και "εν σειρά" μαγνήτης, αντίστοιχα. Ένα πηνίο που έχει μεγάλο αριθμό σπειρών από λεπτό σύρμα είναι τυλιγμένο στο μεσαίο στέλεχος του

εγκάρσιου μαγνήτη. Αυτό το πηνίο είναι γνωστό ως πηνίο "τάσης", συνδέεται με την πηγή τροφοδοσίας και έχει όσο το δυνατό περισσότερες σπείρες, ώστε να είναι όσο πιο επαγωγικό γίνεται. Με άλλα λόγια, το πηνίο τάσης παρέχει μια μεγάλη αναλογία επαγωγικής αντίδρασης προς αντίσταση. Αυτό προκαλεί ένα ρεύμα και κατ' επέκταση μία ροή, που επιπορεύεται της τάσης της πηγής κατά περίπου  $90^\circ$ . Οι ρυθμιζόμενες επιχαλκωμένες σπείρες στο κεντρικό στέλεχος του εγκάρσιου μαγνήτη χρησιμοποιούνται για να καταστήσουν την φασική απόκλιση μεταξύ του μαγνητικού πεδίου, εξαιτίας του εγκάρσιου μαγνήτη, και της τάσης της παροχής, ίση με περίπου  $90^\circ$ . Ο εν σειρά ηλεκτρομαγνήτης διεγείρεται από ένα πηνίο, γνωστό ως "πηνίο ρεύματος", το οποίο συνδέεται σε σειρά με το φορτίο έτσι ώστε να διαρρέεται από το ρεύμα αυτού. Η ροή που παράγεται από αυτόν τον μαγνήτη είναι ανάλογη και σε φάση με το ρεύμα φορτίου.



**Σχήμα 1.58 Μονοφασικός μετρητής ενέργειας επαγωγικού τύπου**

- Σύστημα κίνησης: Το σύστημα κίνησης αποτελείται από έναν ελαφρύ αλουμινένιο δίσκο, ο οποίος περιστρέφεται γύρω από ένα κάθετο άξονα. Ο άξονας που στηρίζει τον δίσκο συνδέεται μέσω ενός ατέρμονα σε έναν ωρολογιακό μηχανισμό στην πρόσοψη του μετρητή για να παρέχει πληροφορίες σχετικά με την καταναλισκόμενη ενέργεια στο φορτίο. Οι μαγνητικές ροές που παράγονται από τον εγκάρσιο και εν σειρά μαγνήτη και μεταβάλλονται ημιτονοειδώς με τον χρόνο, επάγουν δινορρεύματα στον αλουμινένιο δίσκο. Η αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο μαγνητικών πεδίων και των δινορρευμάτων προκαλεί μία κινούσα ροπή στον δίσκο. Ο αριθμός των περιστροφών του δίσκου

είναι, επομένως, ανάλογος προς την ενέργεια που καταναλώνεται από το φορτίο σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα και μετράται συνήθως σε  $kWh$ .

- **Σύστημα πέδησης:** Η πέδηση του δίσκου πραγματοποιείται από δύο μικρούς μόνιμους μαγνήτες οι οποίοι είναι τοποθετημένοι αντιδιαμετρικά προς τους μαγνήτες εναλλασσομένου ρεύματος. Ο δίσκος περνά ανάμεσα από τα μαγνητικά κενά. Η κίνηση του περιστρεφόμενου δίσκου μέσα από το μαγνητικό πεδίο, καθώς αυτός διέρχεται από το κενό αέρος, δημιουργεί δινορρεύματα σε αυτόν, τα οποία αντιδρούν με το μαγνητικό πεδίο και προκαλούν μια ροπή πέδησης (αντιροπή). Αλλάζοντας την θέση του μαγνήτη πέδησης ή εκτρέποντας την μαγνητική ροή που περνά από αυτόν, μπορεί να ελεγχθεί η ταχύτητα του περιστρεφόμενου δίσκου.
- **Σύστημα καταγραφής ή καταμέτρησης:** Το σύστημα καταγραφής ή καταμέτρησης αποτελείται από έναν ατέρμονα τοποθετημένο στον άξονα του δίσκου, ο οποίος περιστρέφει δείκτες που με την σειρά τους δείχνουν σε ψηφία τον αριθμό των φορών που ο δίσκος έχει περιστραφεί. Έτσι ο μετρητής ενέργειας υπολογίζει και προσθέτει μαζί, ή ολοκληρώνει, όλες τις στιγμιαίες τιμές της ισχύος έτσι ώστε η συνολική ενέργεια σε μια περίοδο να είναι γνωστή. Για τον λόγο αυτό, πολλές φορές ο μετρητής αυτός χαρακτηρίζεται και ως **μετρητής "ολοκλήρωσης"**.

### 1.5.2 Αντιμετώπιση σφαλμάτων στον επαγωγικό μετρητή

Θεωρώντας μια πηγή σταθερής τάσης και συχνότητας, στους επαγωγικούς μετρητές ηλεκτρικής ενέργειας μπορούν να εμφανιστούν τα ακόλουθα σφάλματα:

- **Σφάλμα ταχύτητας:** Εξαιτίας της λαθεμένης θέσης του μαγνήτη πέδησης, η ροπή πέδησης δεν αναπτύσσεται σωστά. Αυτό μπορεί να ελεγχθεί όταν ο μετρητής "τρέχει" υπό το ονομαστικό ρεύμα φόρτισής του και υπό εναλλάξ ωμικά και πολύ μικρού συντελεστή ισχύος, μεταφορείας, φορτία. Η ταχύτητα μπορεί να ρυθμιστεί στην σωστή τιμή μετατοπίζοντας τον μαγνήτη πέδησης προς το κέντρο ή μακριά από το κέντρο του δίσκου και τον δακτύλιο σφράγισης. Εάν ο μετρητής τρέχει γρήγορα με ένα επαγωγικό φορτίο και σωστά με ένα μη επαγωγικό φορτίο, ο δακτύλιος πρέπει να μετακινηθεί προς το κέντρο του δίσκου. Αντίθετα, εάν ο μετρητής τρέχει αργά σε ένα μη επαγωγικό φορτίο, ο μαγνήτης πέδησης πρέπει να μετακινηθεί προς το κέντρο του δίσκου.
- **Σφάλμα φάσης:** Ένα σφάλμα λόγω λαθεμένης ρύθμισης του δακτυλίου σφράγισης οδηγεί σε εσφαλμένη μετατόπιση φάσης μεταξύ της μαγνητικής ροής και της τάσης τροφοδοσίας. Αυτό μπορεί να ελεγχθεί με την χρήση ενός φορτίου με συντελεστή ισχύος 0,5. Ρυθμίζοντας την θέση του δακτυλίου σφράγισης στο κεντρικό στέλεχος του εγκάρσιου μαγνήτη, αυτό το σφάλμα μπορεί να εξουδετερωθεί.
- **Σφάλμα τριβής:** Μια πρόσθετη ποσότητα της ροπής οδήγησης απαιτείται για να αντιμετωπιστεί αυτό το σφάλμα. Οι δύο δακτύλιοι στα ακραία στελέχη του εγκάρσιου μαγνήτη ρυθμίζονται για να δημιουργήσουν αυτήν την επιπλέον ροπή. Η ρύθμιση γίνεται με χαμηλό φορτίο (περίπου στο 1/4 ενός πλήρους φορτίου με συντελεστή ισχύος μονάδα).
- **Ολίσθηση:** Σε μερικούς μετρητές μια μικρή αλλά διαρκής περιστροφή εμφανίζεται όταν το πηνίο τάσης διεγείρεται χωρίς ροή ρεύματος. Αυτή η μικρή περιστροφή καταγράφει κάποια ενέργεια. Το φαινόμενο αυτό καλείται σφάλμα ολίσθησης. Η μικρή κίνηση μπορεί να οφείλεται σε εσφαλμένη

αποκατάσταση τριβή, σε στρεβλό μαγνητικό πεδίο και σε υπέρταση στα άκρα του πηνίου τάσης. Αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί κάνοντας δύο οπές αντιδιαμετρικά ως προς τον άξονα περιστροφής. Όταν μία από αυτές τις οπές βρεθεί κάτω από τους πόλους του εγκάρσιου μαγνήτη, η περιστροφή περιορίζεται σε ένα μέγιστο των  $180^\circ$ . Μερικές φορές, ένα μικρό σιδερένιο γλωσσίδι τοποθετείται στο άκρο του δίσκου. Όταν η θέση του ρυθμίζεται προς τον μαγνήτη πέδησης, η ελκτική δύναμη μεταξύ του σιδερένιου γλωσσιδίου και του μαγνήτη πέδησης είναι επαρκής για να σταματήσει την μικρή κίνηση του δίσκου με πλήρη διέγερση του εγκάρσιου μαγνήτη και υπό εν κενώ συνθήκη φορτίου.

- **Επίδραση θερμοκρασίας:** Οι μετρητές ενέργειας είναι σχεδόν ανεπηρέαστοι από τις μεταβολές της θερμοκρασίας. Η θερμοκρασία επηρεάζει εξίσου τις ροπές οδήγησης και πέδησης (με αύξηση της θερμοκρασίας, η αντίσταση επαγόμενου μαγνητικού κυκλώματος στον δίσκο επίσης αυξάνει) και έτσι παράγει ένα αμελητέο σφάλμα. Το επίπεδο της ροής στον μαγνήτη πέδησης μειώνεται και αυτό εισάγει ένα μικρό σφάλμα στις ενδείξεις του μετρητή. Αυτό το σφάλμα συνήθως θεωρείται αμελητέο, αλλά στους καινούργιους μετρητές λαμβάνεται υπόψη για τον σχηματισμό του διαιρέτη ροής στον μαγνήτη πέδησης.



*Η σταθερά του μετρητή ενέργειας ορίζεται ως:*

$$K = \frac{\text{αριθμός στροφών}}{kWh}$$

*Στους εμπορικούς μετρητές η ταχύτητα του δίσκου είναι της τάξης των 1800 στροφών ανά ώρα, υπό πλήρες φορτίο.*

## 1.6 Προβλήματα για την εμπέδωση των υπολογισμών ισχύος σε κυκλώματα εναλλασσομένου

[1] Όταν η τάση τροφοδοσίας σε ένα κύκλωμα είναι  $(2 + j \cdot 5)V$ , το ρεύμα που το διαρρέει είναι  $(8 + j \cdot 4)A$ . Να υπολογιστεί η ισχύς που καταναλώνεται στο κύκλωμα.

[36 W]

[2] Ένα ρεύμα  $(12 + j \cdot 5)A$  διαρρέει κύκλωμα το οποίο τροφοδοτείται από τάση  $(150 + j \cdot 220)V$ . Να υπολογιστούν (α) η πραγματική ισχύς, (β) η άεργος ισχύς, και (γ) η φαινόμενη ισχύς. Να σχεδιαστεί το τρίγωνο ισχύος.

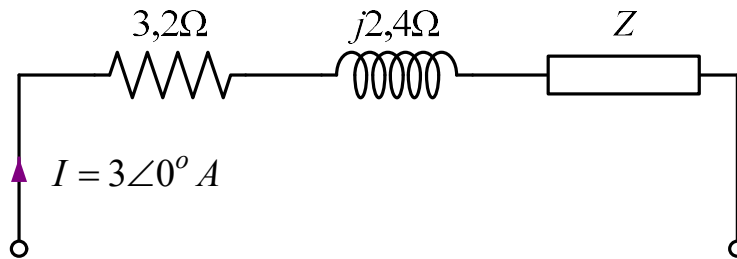
[(α) 2,90 kW (β) 1,89 kVA<sub>Γ</sub> προπορείας (γ) 3,46 kVA]

[3] Ένας πυκνωτής χωρητικής αντίστασης  $40\Omega$  και ωμικής αντίστασης  $30\Omega$  συνδέονται εν σειρά και τροφοδοτούνται από πηγή τάσης  $200\angle 60^\circ V$ . Να υπολογιστεί η πραγματική ισχύς του κυκλώματος.

[480 W]

[4] Το κύκλωμα του σχήματος 1.59 λαμβάνει  $81VA$  με συντελεστή ισχύος 0,8 μεταπορείας. Να υπολογιστεί η τιμή της σύνθετης αντίστασης  $Z$ .

$[(4 + j \cdot 3)\Omega \text{ ή } 5\angle 36,87^\circ \Omega]$



**Σχήμα 1.59 Διάταξη προβλήματος [1]**

[5] Έστω ένα εν σειρά κύκλωμα αποτελούμενο από ωμική αντίσταση  $R$  και πηνίο συντελεστή αυτεπαγωγής  $L$ . Το κύκλωμα καταναλώνει  $2,898 \text{ kW}$  και έχει συντελεστή ισχύος  $0,966$  μεταπορείας. Εάν η εφαρμοζόμενη τάση τροφοδοσίας δίνεται από την σχέση  $u = 169,7 \cdot \sin(100 \cdot t - (\pi/4)) \text{ V}$ , να υπολογιστούν (α) ο φασιθέτης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα, (β) η τιμή της αντίστασης  $R$ , και (γ) η τιμή του συντελεστή αυτεπαγωγής  $L$ .

[(α)  $25 \angle -60^\circ \text{ A}$  (β)  $4,64 \Omega$  (γ)  $12,4 \text{ mH}$ ]

[6] Η πτώση τάσης στα άκρα και το ρεύμα σε ένα κύκλωμα είναι  $(190 + j \cdot 40) \text{ V}$  και  $(9 - j \cdot 4) \text{ A}$ , αντίστοιχα. Να υπολογιστεί η ενεργός και η άεργος ισχύς, καθορίζοντας εάν η γωνία είναι προπορείας ή μεταπορείας.

[ $1550 \text{ W}$ ,  $1120 \text{ VAr}$  μεταπορείας]

[7] Δύο σύνθετες αντιστάσεις  $Z_1 = 6 \angle 40^\circ \Omega$  και  $Z_2 = 10 \angle 30^\circ \Omega$  συνδέονται εν σειρά και έχουν μία συνολική άεργο ισχύ  $1650 \text{ VAr}$  μεταπορείας. Να υπολογιστούν (α) η μέση ισχύς, (β) η φαινόμενη ισχύς, και (γ) ο συντελεστής ισχύος.

[(α)  $2469 \text{ W}$  (β)  $2970 \text{ VA}$  (γ)  $0,83$  μεταπορείας]

[8] Ένα ρεύμα  $i = 7,5 \cdot \sin(\omega \cdot t - (\pi/4)) \text{ A}$  διαρρέει κύκλωμα το οποίο τροφοδοτείται από τάση  $u = 180 \cdot \sin(100 \cdot t + (\pi/12)) \text{ V}$ . Να υπολογιστούν (α) η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος, (β) η πραγματική ισχύς, (γ) η άεργος ισχύς, και (δ) η φαινόμενη ισχύς. Να σχεδιαστεί το τρίγωνο ισχύος.

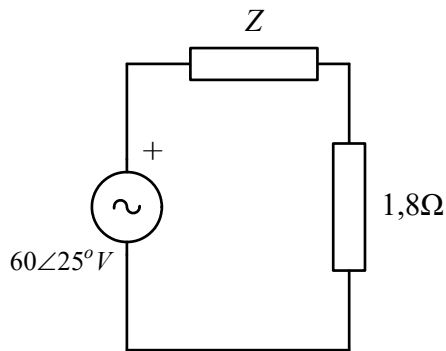
[(α)  $24 \angle 60^\circ \Omega$  (b)  $337,5 \text{ W}$  (γ)  $584,6 \text{ VAr}$  μεταπορείας (δ)  $675 \text{ VA}$ ]

[9] Το κύκλωμα του σχήματος 1.60 έχει ισχύ  $480 \text{ W}$  και συντελεστή ισχύος  $0,8$  προπορείας. Να υπολογιστούν (α) η φαινόμενη ισχύς, (β) η άεργος ισχύς, και (γ) η τιμή της σύνθετης αντίστασης  $Z$ .

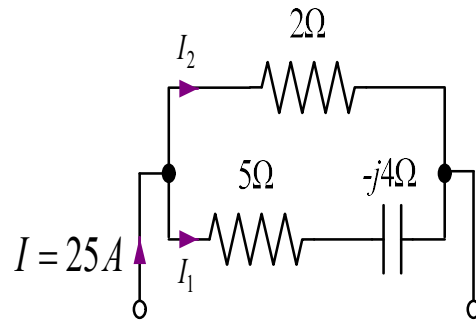
[(α)  $600 \text{ VA}$  (β)  $360 \text{ VAr}$  προπορείας (γ)  $(3 - j \cdot 3,6) \Omega$  ή  $4,69 \angle -50,19^\circ \Omega$ ]

[10] Για το δίκτυο του σχήματος 1.61, να υπολογιστούν (α) οι τιμές των ρευμάτων  $I_1$  και  $I_2$ , (β) η συνολική πραγματική ισχύς, (γ) η άεργος ισχύς, και (δ) η φαινόμενη ισχύς.

[(α)  $I_1 = 6,20 \angle 29,74^\circ \text{ A}$ ,  $I_2 = 19,86 \angle -8,92^\circ \text{ A}$  (β)  $981 \text{ W}$  (γ)  $153,9 \text{ VAr}$  προπορείας (δ)  $992,8 \text{ VA}$ ]



Σχήμα 1.60 Διάταξη προβλήματος [9]



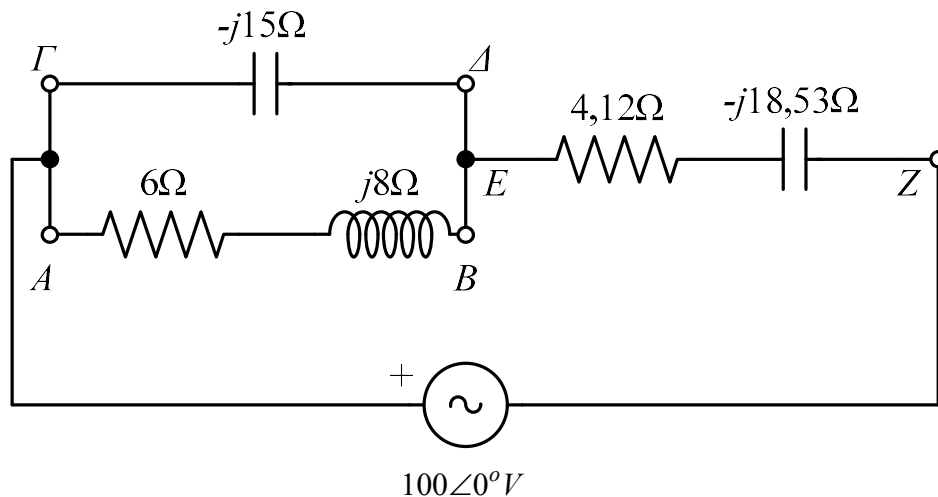
Σχήμα 1.61 Διάταξη προβλήματος [10]

[11] Ένα κύκλωμα αποτελείται από μία σύνθετη αντίσταση  $5\angle -45^\circ \Omega$  εν παραλλήλω με μία ωμική αντίσταση  $10\Omega$ . Το ρεύμα του κυκλώματος είναι  $4A$ . Να υπολογιστούν (α) η πραγματική ισχύς, (β) η άεργος ισχύς, και (γ) ο συντελεστής ισχύος.

[(α)  $49,34W$  (β)  $28,90VAr$  προπορείας (γ)  $0,863$  προπορείας]

[12] Για του κύκλωμα του σχήματος 1.62, να υπολογιστεί η ενεργός ισχύς που καταναλώνεται στους κλάδους (α) A και B, (β) Γ και Δ, (γ) E και Z.

[(α)  $254,1W$  (β)  $0$  (φ)  $65,92W$ ]



Σχήμα 1.62 Διάταξη προβλήματος [12]

[13] Ένας μετασχηματιστής  $600kVA$  λειτουργεί υπόπληρες φορτίο με έναν συνολικό συντελεστή ισχύος  $0,64$  μεταπορείας. Ο συντελεστής ισχύος βελτιώνεται προσθέτοντας πυκνωτές παράλληλα μέχρις ότου ο συνολικός συντελεστής ισχύος να γίνει  $0,95$  μεταπορείας. Να υπολογιστούν τα  $kVA$  της συστοιχείας των πυκνωτών που χρησιμοποιούνται.

[ $334,8 kVAr$  προπορείας]

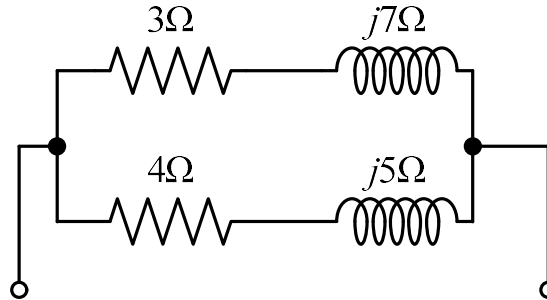
[14] Μία πηγή  $130\angle 40^\circ V$ ,  $2kHz$ , εφαρμόζεται σε ένα κύκλωμα που έχει σύνθετη αντίσταση  $(5 + j \cdot 12)\Omega$ . Να υπολογιστούν (α) το συνολικό ρεύμα του κυκλώματος, (β) η πραγματική, φαινόμενη και άεργος ισχύς, (γ) τα  $VAr$  του πυκνωτή που πρέπει να συνδεθεί παράλληλα με την σύνθετη αντίσταση για να βελτιώσει τον συντελεστή ισχύος του κυκλώματος σε  $0,940$  μεταπορείας, και (δ) η τιμή της χωρητικότητας του απαιτούμενου πυκνωτή.



[(α)  $10\angle -27,38^\circ A$  (β) 500W, 1300 VA, 1200VAr μεταπορείας (γ) 1018,5VAr προπορείας (δ) 4,797μF]

[15] Το κύκλωμα του σχήματος 1.63 έχει μία συνολική πραγματική ισχύ 2253W. Να υπολογιστούν (α) η συνολική σύνθετη αντίσταση, (β) το συνολικό ρεύμα του κυκλώματος, (γ) η φαινόμενη ισχύς, (δ) η άεργος ισχύς, (ε) ο συντελεστής ισχύος του κυκλώματος, (στ) η χωρητικότητα του πυκνωτή που πρέπει να συνδεθεί παράλληλα με το κύκλωμα για να βελτιώσει το συντελεστή ισχύος σε 0,90 μεταπορείας, εάν η συχνότητα της πηγής είναι 50 Hz.

[(α)  $3,51\angle 58,40^\circ \Omega$  (β) 35,0A (γ) 4300VA (δ) 3662 VAr μεταπορείας (ε) 0,524 μεταπορείας (στ) 542,3μF]



Σχήμα 1.63 Διάταξη προβλήματος [15]

[16] Ο συντελεστής ισχύος ενός συγκεκριμένου φορτίου σε 0,92 μεταπορείας με την προσθήκη μιας συστοιχίας πυκνωτών 30kVAr. Εάν η προκύπτουσα φαινόμενη ισχύς είναι 200kVA, να υπολογιστούν (α) η πραγματική ισχύς, (β) η άεργος ισχύς πριν την βελτίωση του συντελεστού ισχύος, και (γ) ο συντελεστής ισχύος μετά την διόρθωση.

[(α) 184kW (β) 108,4kVAr μεταπορείας (γ) 0,862 μεταπορείας]

### 1.7 Προβλήματα για την εμπέδωση των τριφασικών συστημάτων

[17] Τρία ωμικά φορτία αντίστασης  $50\Omega$  συνδέονται σε αστέρα και τροφοδοτούνται από μία τριφασική παροχή 400V. Να υπολογιστούν (α) η φασική τάση, (β) το φασικό ρεύμα και (γ) το ρεύμα γραμμής.

[(α) 231V (β) 4,62A (γ) 4,62A]

[18] Εάν το φορτίο του ερωτήματος 1 συνδέονται σε αστέρα και τροφοδοτούνται από την ίδια παροχή, να υπολογιστούν (α) η φασική τάση, (β) το φασικό ρεύμα και (γ) το ρεύμα γραμμής.

[(α) 400V (β) 8A (γ) 13,86A]

[19] Ένα φορτίο συνδεσμολογημένο σε αστέρα αποτελείται από τρία πανομοιότυπα πηνία, καθένα αυτεπαγωγής 159,2mH και αντίστασης  $50\Omega$ . Εάν η συχνότητα της παροχής είναι 50Hz και το ρεύμα γραμμής 3A να υπολογιστούν (α) η φασική τάση και (β) η τάση γραμμής.

[(α) 212 V (β) 367 V]

[20] Τρεις πανομοιότυποι πυκνωτές συνδέονται (α) σε αστέρα, (β) σε τρίγωνο και τροφοδοτούνται από μία τριφασική παροχή 400V, 50Hz. Εάν το ρεύμα γραμμής είναι 12A, να υπολογιστεί σε κάθε περίπτωση η χωρητικότητα του κάθε πυκνωτή.

[(α) 165,4μF (β) 55,13μF]

[21] Τρία πηνία που το καθένα έχει αντίσταση  $6\Omega$  και αυτεπαγωγή LH συνδέονται σε (α) αστέρα και (β) τρίγωνο και τροφοδοτούνται από μία τριφασική παροχή 415V,



50Hz. Εάν το ρεύμα γραμμής είναι 30A, να βρεθεί για κάθε συνδεσμολογία η τιμή της αυτεπαγωγής L.

[(α) 16,78mH (β) 73,84mH]

[22] Ένα τριφασικό συνδεσμολογημένο σε αστέρα σύστημα 4 αγωγών, 400V τροφοδοτεί τρία ωμικά φορτία 15kW, 20kW και 25kW στις φάσεις 1, 2 και 3, αντίστοιχα. Να υπολογιστεί το ρεύμα που ρέει σε κάθε έναν από τους τέσσερις αγωγούς.

[I<sub>1</sub> 64,95A, I<sub>2</sub> 86,60A, I<sub>3</sub> 108,25A, I<sub>N</sub> 37,50A]

[23] Ένας τριφασικός συνδεδεμένος σε αστέρα εναλλάκτης, αποδίδει ένα ρεύμα γραμμής 65A σε ένα ισορροπημένο φορτίο συνδεδεμένο σε τρίγωνο. Εάν η τάση γραμμής είναι 380V, να υπολογιστούν (α) η φασική τάση του εναλλάκτη, (β) το φασικό ρεύμα του εναλλάκτη και (γ) το φασικό ρεύμα του φορτίου.

[(α) 219,4V (β) 65A (γ) 37,53A]

[24] Να υπολογιστεί η συνολική ισχύς που καταναλώνεται από τρεις ωμικές αντιστάσεις όταν αυτές συνδέονται (α) σε αστέρα και (β) σε τρίγωνο. Να θεωρηθεί τριφασική παροχή 440V.

[(α) 9,68kW (β) 29,04kW]

[25] Να υπολογιστεί η ισχύς που καταναλώνεται στο κύκλωμα του προβλήματος 3.

[1,35kW]

[26] Ένα ισορροπημένο φορτίο σε τρίγωνο έχει τάση γραμμής 400V, ρεύμα γραμμής 8A και συντελεστή ισχύος μεταπορείας 0,94. Να σχεδιαστεί το πλήρες διανυσματικό διάγραμμα του φορτίου. Ποια είναι η συνολική ισχύς που καταναλώνεται στο φορτίο?

[5,21kW]

[27] Τρία επαγωγικά φορτία, το καθένα αντίστασης 4Ω και επαγωγικής αντίστασης 9Ω συνδέονται σε τρίγωνο. Όταν συνδέονται σε μία τριφασική παροχή, τα φορτία καταναλώνουν 1,2kW. Να υπολογιστούν (α) ο συντελεστής ισχύος του φορτίου, (β) το φασικό ρεύμα, (γ) το ρεύμα γραμμής και (δ) η τάση της παροχής.

[(α) 0,406 (β) 10A (γ) 17,32A (δ) 98,49V]

[28] Η τάση εισόδου, το ρεύμα και η ισχύς σε έναν κινητήρα μετρώνται 415V, 16,4A και 6kW, αντίστοιχα. Να υπολογιστεί ο συντελεστής ισχύος του συστήματος.

[0.509]

[29] Ένα τριφασικός 440 V κινητήρας εναλλασσομένου έχει ισχύ εξόδου 11,25kW και λειτουργεί με έναν συντελεστή ισχύος 0,8 μεταπορείας και με βαθμό απόδοσης 84%. Εάν ο κινητήρας είναι συνδεσμολογημένος σε τρίγωνο, να υπολογιστούν (α) η ισχύς εισόδου, (β) το ρεύμα γραμμής και (γ) το φασικό ρεύμα.

[(α) 13,39kW (β) 21,96A (γ) 12,68A]

[30] Δύο βαττόμετρα συνδέονται για να μετρήσουν την ισχύ εισόδου σε ένα ισορροπημένο τριφασικό φορτίο. Εάν οι ενδείξεις των βαττομέτρων είναι 9,3kW και 5,4kW να υπολογιστούν (α) η συνολική ισχύς εξόδου, και (β) ο συντελεστής ισχύος του φορτίου.

[(α) 14,7kW (β) 0,909]

[31] Η ισχύς εισόδου σε έναν τριφασικό κινητήρα μετρήθηκε ίση με 8kW χρησιμοποιώντας την μέθοδο μέτρησης των δύο βαττομέτρων. Να υπολογιστεί η ένδειξη του κάθε βαττομέτρου εάν ο συντελεστής ισχύος του συστήματος είναι 0,85.

[5,431kW, 2,569kW]

[32] Τρία πανομοιότυπα πηνία που το καθένα έχει αντίσταση 4,0Ω και επαγωγική αντίσταση 3,46Ω συνδέονται (α) σε αστέρα και (β) σε τρίγωνο και τροφοδοτούνται από μία τριφασική παροχή 400V. Για κάθε συνδεσμολογία να υπολογιστούν οι

ενδείξεις των δύο βαττομέτρων που συνδέονται για να μετρήσουν την ισχύ με την βοήθεια των δύο βαττομέτρων.

[(α) 17,15kW, 5,73kW (β) 51,46kW, 17,18kW]

[33] Ένας τριφασικός συνδεσμολογημένος σε αστέρα εναλλάκτης τροφοδοτεί ένα συνδεδεμένο σε τρίγωνο φορτίο, κάθε φάση του οποίου έχει αντίσταση  $15\Omega$  και επαγωγική αντίσταση  $20\Omega$ . Εάν η τάση γραμμής είναι  $400V$ , να υπολογιστούν (α) το ρεύμα που παρέχεται από τον εναλλάκτη και (β) η ισχύς εξόδου και τα kVA του εναλλάκτη, θεωρώντας μηδενικές τις απώλειες στην γραμμή μεταξύ εναλλάκτη και φορτίου.

[(α) 27,71A (β) 11,52kW, 19,2kVA]

[34] Κάθε φάση ενός φορτίου συνδεδεμένου σε τρίγωνο περιλαμβάνει μία αντίσταση  $40\Omega$  σε σειρά με έναν πυκνωτή  $40\mu F$ . Θεωρώντας μια τριφασική παροχή  $415V$ ,  $50Hz$ , να υπολογιστούν (α) το φασικό ρεύμα, (β) το ρεύμα γραμμής, (γ) η συνολική ισχύς που καταναλώνεται, και (δ) τα kVA του φορτίου.

[(α) 4,66A (β) 8,07A (γ) 2,605kW (δ) 5,80kVA]

[35] Τρεις πυκνωτές  $24\mu F$  συνδέονται σε αστέρα και τροφοδοτούνται από μία τριφασική παροχή  $400V$ ,  $50Hz$ , συνδεσμολογημένη σε αστέρα. Ποια η τιμή της χωρητικότητας που πρέπει να συνδεθεί σε τρίγωνο ώστε να έχουμε το ίδιο ρεύμα γραμμής?

[ $8\mu F$ ]